

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
NÚCLEO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Elenilda Josefa de Oliveira

Transporte Quântico Decoerente em Sistemas
Mesoscópicos

São Cristóvão - SE

2015

ELENILDA JOSEFA DE OLIVEIRA

TRANSPORTE QUÂNTICO DECOERENTE EM SISTEMAS MESOSCÓPICOS

Dissertação apresentada ao Núcleo de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Sergipe, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Assis Gois de Almeida

São Cristóvão - SE

2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
Núcleo de Pós-Graduação em Física

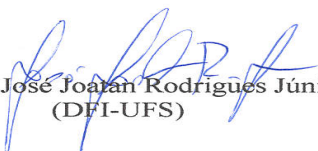
***Transporte quântico decoerente em sistemas
mesoscópicos***

por

Elenilda Josefa de Oliveira

Dissertação de mestrado **APROVADA** em sessão pública no dia trinta de julho do ano dois mil e quinze perante a banca examinadora constituída pelos seguintes professores:


Prof. Dr. Francisco Assis Gois de Almeida
(DFI-UFS)


Prof. Dr. José Joatan Rodrigues Júnior
(DFI-UFS)


Prof. Dr. Antonio Murilo Santos Macêdo
(DF-UFPE)

Aos meus pais, Josefa e Sebastião

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a **Deus** pelo dom da vida e por guiar-me frente às dificuldades encontradas, tanto acadêmicas como pessoais. Sem Ele a realização deste trabalho jamais teria sido possível.

Aos meus pais, **Josefa e Sebastião**, por todo amor que sempre dedicaram a mim, pelo incentivo aos estudos e por me apoiarem nesta jornada longe de casa. Ambos serão responsáveis por cada êxito alcançado ao longo de minha vida.

Aos **meus irmãos(as)** pelo carinho que sempre demonstraram e pelo incentivo.

Ao meu orientador Professor **Francisco Assis** pela paciência, compreensão e por todos os ensinamentos. Ele foi um exemplo de profissional, dedicado, ético e sempre disposto a compartilhar seu conhecimento.

Ao departamento de física da Universidade Federal de Sergipe pelas condições necessárias para o estudo e para o desenvolvimento das atividades científicas. Sou grata a todos **professores e funcionários** do DF pela competência em seus trabalhos.

Aos companheiros do grupo de física mesoscópica pelas valorosas discussões e por sempre estarem dispostos a ouvir e ajudar: **Eduardo e Jaédson**.

Aos amigos e colegas do mestrado por todos os momentos compartilhados: **Paulo, Francisco, Jorge, Samuel, Ivani, Thiago, Edielma, Fernando, Fabinara, Helena, Ylla, Yvens, Julyanne e Osmar**. De forma especial, agradeço a **Erilaine e Ariana** pelo apoio e amizade.

Agradeço também à **Nancy, Karine, Socorro, Daniela e Waldson** pelo incentivo e pelas conversas divertidas. De forma geral, agradeço a todos os meus amigos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

Por fim, agradeço à **CAPES** pelo apoio financeiro.

Tudo é possível ao que crê.
– Marcos, 9:23, Bíblia Sagrada

Resumo

Os avanços científicos que temos experimentado nas últimas décadas proporcionaram a construção de sistemas em escala mesoscópica. Esses sistemas tornaram-se muito úteis como ferramentas de investigação em diversas áreas da ciência. Na física mesoscópica a característica ondulatória dos elétrons é mais evidente do que na física clássica e o processo de condução dos elétrons é melhor representado pela função de onda que os descreve. Exemplos da aplicação de sistemas mesoscópicos são os pontos quânticos que são cavidades abertas por onde os elétrons são limitados a fluírem. Dessa forma, o objetivo deste trabalho é estudar os efeitos da decoerência no transporte de elétrons em dois sistemas: *i*) ponto quântico com guia fictício e *ii*) ponto quântico com estube, onde levamos em consideração as propriedades ondulatórias dos elétrons. O formalismo que utilizamos é o da matriz de espalhamento, a qual relaciona as amplitudes das ondas que entram e saem da região de espalhamento. Como os sistemas estudados são caóticos, as matrizes de espalhamento podem ser tratadas como aleatórias. Geramos estas matrizes por meio de simulação computacional e delas extraímos a condutância do sistema. A distribuição da condutância foi obtida por meio de uma análise probabilística.

Palavras-chave: Física mesoscópica, pontos quânticos, matriz de espalhamento, simulação computacional.

Abstract

The scientific advances we have experienced in recent decades have enabled us to produce systems in the mesoscopic scale. These systems have become very useful as research tools in various areas of science. In mesoscopic physics the ondulatory characteristic of electrons is more evident than in classical physics and the electron conduction process is better represented by the wave function that describes it. Examples of application of mesoscopic systems are quantum dots which are open cavities where electrons are limited to flow through. Thus, the objective of this work is to study the effects of decoherence in the transport of electrons in two systems: *i*) quantum dot with a fictitious guide and *ii*) quantum dot with stub, where we take into account ondulatory properties of electrons. The formalism that we use is the scattering matrix, which relates the incoming and outgoing amplitudes in the scattering of waves coming in and out of the scattering region. Since the studied systems are chaotic, the scattering matrices can be treated as random. These matrices were generated by computational simulation and then the conductance values were computed. The conductance distribution was obtained by means of probabilistic analysis.

Keywords: Mesoscopic physics, quantum dots, scattering matrix, computer simulation.

Lista de Figuras

2.1	Ilustração conceitual de um experimento de interferência. Um feixe de elétrons é separado em dois caminhos distintos que se encontram logo em seguida. Figura retirada da ref. [1].	8
2.2	Ilustração dos regimes de transporte: a) difusivo e b) balístico.	9
2.3	Esquema de ponto de contato quântico formado por uma constrição de largura L e abertura de tamanho W , destinada à passagem de elétrons provenientes dos contatos nos lados esquerdo e direito.	10
2.4	Modelo de ponto de contato quântico com guia de ondas conectado a dois reservatórios de elétrons, caracterizados por seus respectivos potenciais eletroquímicos, μ_1 e μ_2	10
2.5	Representação com as energias das subbandas, dadas pela eq. (2.10). Quando $T = 0$, o potencial químico μ_i do reservatório i é igual à sua energia de Fermi E_F que corresponde à energia do elétron mais energético deste reservatório. As linhas tracejadas representam as energias dos canais fechados. O gráfico mostra o caso em que há três canais abertos.	12
2.6	(a) Esquema do ponto quântico balístico simples, delimitado por dois pontos de contato; (b) sua modelagem através de um centro espalhador conectado a dois guias de onda, que são conectados a reservatórios de elétrons.	17
2.7	(a) Representação de dois guias de apenas um canal; (b) um guia de dois canais e um guia de um canal; (c) três guias com um, dois e três canais; (d) n guias, cada um com um número qualquer de canais (situação geral).	19
2.8	Esquema da associação em paralelo de centros espalhadores. Em (a) L centros espalhadores em paralelo e em (b), centro espalhador efetivo.	21
2.9	Esquema da associação em série de centros espalhadores. Em (a) dois centros espalhadores em série e em (b), centro espalhador efetivo.	22

4.1	Esquema do ponto quântico com um guia fictício que ocasiona decoerência de fase do sistema.	28
4.2	Esquema do ponto quântico com um estube, o qual ocasiona decoerência do sistema.	29
4.3	Esquema que mostra como as matrizes de espalhamento do centro da cavidade e da barreira podem ser associadas em série. Em (a) associação no modelo GF e em (b) associação no modelo ST. A figura também mostra as associações das matrizes de espalhamento que resultam em uma única matriz de espalhamento efetiva para os dois modelos.	30
5.1	$\rho(G)$ versus G quando $N_3 = 1$ para diferentes valores de Γ com simetria de reversão temporal ($\beta = 1$). As linhas representam os valores encontrados na literatura, enquanto os pontos representam os dados obtidos por simulação neste trabalho.	34
5.2	$\rho(G)$ versus G quando $\Gamma = 1$ para diferentes valores de N_3 com simetria de reversão temporal ($\beta = 1$). As linhas representam os valores encontrados na literatura, enquanto os pontos representam os dados obtidos por simulação neste trabalho.	35
5.3	$\rho(G)$ versus G quando $N_3 = 1$ para diferentes valores de Γ quando não há mais simetria de reversão temporal ($\beta = 2$). As linhas representam os valores encontrados na literatura, enquanto os pontos representam os dados obtidos por simulação neste trabalho.	36
5.4	$\rho(G)$ versus G quando $\Gamma = 1$ para diferentes valores de N_3 quando não há mais simetria de reversão temporal ($\beta = 2$). As linhas representam os valores encontrados na literatura, enquanto os pontos representam os dados obtidos por simulação neste trabalho.	36
5.5	$\rho(G)$ versus G para diversos valores de λ quando $N_1 = N_2 = 1$ para diferentes valores de N_3 com simetria de reversão temporal ($\beta = 1$).	37
5.6	$\rho(G)$ versus G para diferentes valores de λ quando $N_1 = N_2 = 1$ e $N_3 \rightarrow \infty$ com simetria de reversão temporal ($\beta = 1$). As linhas representam os valores encontrados na literatura, enquanto os pontos representam os dados obtidos por simulação neste trabalho.	38

5.7	$\rho(G)$ versus G para diversos valores de λ quando $N_1 = N_2 = 5$ para diferentes valores de N_3 com simetria de reversão temporal ($\beta = 1$).	38
5.8	$\rho(G)$ versus G para diversos valores de λ quando $N_1 = N_2 = 1$ para diferentes valores de N_3 sem simetria de reversão temporal ($\beta = 2$).	39
5.9	$\rho(G)$ versus G para diferentes valores de λ quando $N_1 = N_2 = 1$ e $N_3 \rightarrow \infty$ sem simetria de reversão temporal ($\beta = 2$). As linhas representam os valores encontrados na literatura, enquanto os pontos representam os dados obtidos por simulação neste trabalho.	40
5.10	$\rho(G)$ versus G para diversos valores de λ quando $N_1 = N_2 = 5$ para diferentes valores de N_3 sem simetria de reversão temporal ($\beta = 2$).	40
5.11	ρ versus G para os modelos ST e GF quando $N_3 \rightarrow \infty$	42
5.12	ξ versus S_{KL} . A curva sólida representa o ajuste cúbico (para $\lambda = 1$). Aqui, o valor que minimiza S_{KL} é $\xi^* = 1,303$	42
5.13	$\rho(G)$ versus ξ^*	43
5.14	λ versus ξ^* . Para cada valor de λ temos um valor de ξ^* associado.	44

Sumário

Agradecimentos	v
Resumo	vii
Abstract	viii
Lista de Figuras	xi
1 Introdução	3
1.1 Problemas abordados	4
2 Conceitos básicos	5
2.1 Física mesoscópica	5
2.1.1 Comprimento de onda de Fermi (λ_F)	5
2.1.2 Caminho livre médio (l_m)	6
2.1.3 Comprimento de relaxação de fase (l_ϕ)	7
2.1.4 Comprimento de localização eletrônica (ϵ)	8
2.2 Regimes de transporte	9
2.3 Ponto de contato quântico	9
2.4 Ponto quântico caótico	15
2.5 A fórmula de Landauer	16
2.6 Matriz de espalhamento	16
2.7 Associação de centros espalhadores	20
2.7.1 Associação em paralelo	21
2.7.2 Associação em série	22
2.8 Sumário	22

	2
3 A teoria de matrizes aleatórias	23
3.1 Invariância sob reversão temporal	24
3.2 O ensemble circular	25
3.3 Sumário	26
4 Desenvolvimento do modelo estudado	27
4.1 Modelo de guia fictício	27
4.2 Modelo de estube	29
4.3 Algoritmo	30
5 Resultados	33
5.1 Comportamento de ρ em função de G para o modelo GF	33
5.2 Comportamento de ρ em função de G para o modelo ST	41
6 Conclusões e Perspectivas	45
A Condutância do ponto quântico caótico com guia fictício	47
B Unitariedade da matriz de espalhamento	49

Capítulo 1

Introdução

Os avanços tecnológicos que a indústria vem apresentando nas últimas décadas proporcionaram o avanço da engenharia quântica, impulsionando a construção de sistemas mesoscópicos, cujas dimensões são da ordem do livre caminho médio do elétron [1]. No regime mesoscópico o sistema é caracterizado pelo transporte eletrônico quântico, não interessando suas características, tais como, tamanho, composição, entre outras [2]. Para estudar as propriedades de transporte em geral aplica-se uma diferença de potencial nos terminais (ou reservatórios) que são conectados à amostra. Por sua vez, cada terminal tenta impor a esta seu próprio potencial e, conseqüentemente, o sistema sai do estado de equilíbrio e entra em um regime de transporte.

Os sistemas mesoscópicos podem ser constituídos por uma cavidade aberta que permite o transporte de uma quantidade fixa de elétrons, conhecida como ponto quântico [4, 5]. Os efeitos provenientes da baixa dimensionalidade torna necessário um formalismo diferente da física clássica. O primeiro formalismo construído para o estudo das propriedades mesoscópicas foi proposto por Landauer. No tratamento de Landauer, o transporte eletrônico passa a ser visto em termos da probabilidade de um elétron ser transmitido de um reservatório para outro, e não somente através de resposta a um campo elétrico [6].

Quanticamente, os elétrons apresentam comportamento ondulatório e suas funções de onda possuem uma fase. Sejam duas funções de ondas expressas por: $\Psi_n = C_n(x)e^{i\phi_n}$ onde $n = 1, 2$. Quando essas ondas são combinadas a densidade de probabilidade é dada por:

$$P(x) = |\Psi(x)|^2 = \Psi(x)^* \Psi(x) = |C_1|^2 + |C_2|^2 + 2|C_1^* C_2| \cos(\phi_1 - \phi_2), \quad (1.1)$$

onde $\Psi(x) = \Psi_1(x) + \Psi_2(x)$, e o último termo de (1.1) é denominado termo de interferência, sendo o único que depende das fases das ondas. Para os casos extremos em que $\cos(\phi_1 - \phi_2) = \pm 1$, a probabilidade será máxima quando é igual à soma dos quadrados das amplitudes das ondas individuais e será mínima quando é igual à subtração [7].

O transporte de elétrons em um sistema pode ser coerente ou decoerente. Se ao longo do percurso os elétrons mantiverem uma correlação entre suas fases, o transporte é dito coerente. Para o caso anterior, o sistema é coerente quando a diferença de fase dos elétrons $\phi_1 - \phi_2$ permanecer constante ao longo do percurso. No regime mesoscópico, a decoerência está intimamente relacionada com espalhamentos inelásticos e pode surgir através das interações dos elétrons com outros elétrons, com fônons ou espalhamentos por rotação de spin.

1.1 Problemas abordados

No presente trabalho será estudado o comportamento da densidade de probabilidade da condutância para um ponto quântico em que a decoerência de fase está presente. Serão analisados dois casos: *i)* ponto quântico com guia fictício e *ii)* ponto quântico com estube.

No segundo capítulo serão apresentados os conceitos básicos sobre o transporte eletrônico no regime mesoscópico, abrangendo as escalas mais importantes para a descrição do transporte. Será apresentado também o ponto quântico acoplado idealmente a dois guias (contatos ideais), que nos servirá de base para os modelos de pontos quânticos estudados. Mostraremos ainda a formulação utilizada para obtermos informações sobre a condutância do sistema abordado.

No terceiro capítulo faremos uma revisão sobre a teoria de matrizes aleatórias, a qual nos fornece propriedades universais da dinâmica caótica presente em cavidades.

O capítulo quatro dedica-se em mostrar os modelos estudados e o método usado para descrever suas condutâncias.

Apresentaremos os resultados no capítulo cinco.

Por fim, no último capítulo será realizada uma conclusão geral do presente trabalho, ressaltando seus pontos mais importantes.

Capítulo 2

Conceitos básicos

Neste capítulo faremos uma revisão sobre a física mesoscópica, apresentando alguns conceitos básicos. Será apresentado o ponto de contato quântico, que é o sistema mesoscópico mais simples que existe. Introduziremos ainda o conceito de probabilidade de transmissão, o qual relaciona-se com os espalhamentos sofridos pelos elétrons. Estes espalhamentos podem ser representados pela matriz de espalhamento.

2.1 Física mesoscópica

O campo da física mesoscópica surgiu a partir da década de 1980, com experimentos eletrônicos em dispositivos bem pequenos [1]. A física mesoscópica está na região intermediária entre os efeitos quânticos presentes em sistemas microscópicos e os efeitos clássicos de sistemas macroscópicos. No regime mesoscópico, os efeitos quânticos como tunelamento, interferência e princípio de exclusão, por exemplo, ainda se fazem presentes.

Para caracterizarmos um sistema mesoscópico, precisamos definir as escalas de espaço e tempo mais importantes e os regimes que estão associados a elas [8]. Os sistemas que apresentam escalas de comprimento maiores que as mostradas aqui podem ser tratados pela física clássica. A tabela 2.1 apresenta as ordens de grandeza de algumas destas escalas.

2.1.1 Comprimento de onda de Fermi (λ_F)

Para condutores em baixas temperaturas, apenas os elétrons com energias próximas a energia de Fermi participam do processo de condução, e o comprimento de onda de Fermi λ_F referente a esta energia é dado por

1mm	l_m no regime Hall quântico
100 μ m	l_m e l_ϕ em semicondutores com alta mobilidade
10 μ m	
1 μ m	
100nm	Dispositivos semicondutores comerciais (1900)
10nm	λ_F em semicondutores l_m em filmes metálicos policristalinos
1nm	λ_F em metais distância entre átomos
Å	

Tabela 2.1: Ordens de grandeza de algumas escalas de comprimento relevantes para a física mesoscópica; l_m é o caminho livre médio, l_ϕ é o comprimento de relaxação de fase e λ_F é o comprimento de onda de Fermi. Tabela retirada da ref. [1].

$$\lambda_F = \frac{2\pi}{k_F}, \quad (2.1)$$

em que k_F é o número de onda associado à energia de Fermi. Além do comprimento de onda de Fermi, podemos definir a velocidade de Fermi como $v_F = \frac{\hbar k_F}{m}$.

2.1.2 Caminho livre médio (l_m)

Sabemos que o movimento de um elétron em um condutor ou cristal perfeito é similar ao movimento de uma partícula no vácuo, porém, com massa diferente devido ao potencial periódico presente na rede [1]. Classicamente, esse elétron colide, ocasionalmente, com íons ou outros elétrons livres, alterando seu momento. A distância percorrida por ele sem sofrer colisões é chamada de caminho livre médio, l_m . Neste sentido, alguns modelos clássicos como o de Drude-Sommerfeld [9] (conhecido também como modelo do elétron livre) consideram que todas as partículas, incluindo os elétrons, são perfeitamente rígidas e, portanto, as colisões são instantâneas, ou seja, o elétron muda seu momento abruptamente. Sendo assim, o caminho livre médio é definido por $l_m = v_F \tau_c$, onde v_F é a velocidade de Fermi e τ_c é tempo médio entre sucessivas colisões do elétron.

Diferente do caso clássico, quanticamente o elétron não se comporta apenas como partícula. O elétron apresenta dualidade onda-partícula e está susceptível a espalhamentos, ocasionados por potenciais que mudam seu estado, ao mudar seu momento, por exemplo. Ao contrário das colisões consideradas nos modelos clássicos, o espalhamento não acontece de forma instantânea, sendo que o tempo médio de mudança do momento do elétron é maior que no caso clássico, e é definido como

$$\tau_m = \frac{\tau_c}{\alpha_m}, \quad (2.2)$$

onde $0 < \alpha_m < 1$ representa a efetividade que o espalhamento possui em mudar o momento inicial do elétron. Dessa forma, podemos redefinir o caminho livre médio da seguinte forma

$$l_m = v_F \tau_m, \quad (2.3)$$

o qual significa a distância média que um elétron percorre entre sucessivos espalhamentos elásticos. Nesses espalhamentos, a energia e o módulo do momento do elétron são conservados.

2.1.3 Comprimento de relaxação de fase (l_ϕ)

Quanticamente, o estado de uma partícula é definido por sua função de onda, a qual possui uma fase. A fase está relacionada a efeitos de interferência. Assim como o momento pode ser mudado por processos de espalhamento, a fase de uma onda pode mudar por meio de interações com campos ou partículas. Dessa forma, o comprimento de relaxação de fase, l_ϕ , pode ser definido como a distância média que o elétron percorre antes de sofrer um espalhamento inelástico, que destrói sua fase inicial e que modifica sua energia. Além disso, ao modificar sua fase inicial, o movimento do elétron torna-se aleatório, de modo que, o seu transporte é dito decoerente.

Em analogia ao livre caminho médio, podemos definir o tempo de relaxação de fase como

$$\tau_\phi = \frac{\tau_c}{\alpha_\phi}, \quad (2.4)$$

onde $0 < \alpha_\phi < 1$ representa a efetividade de um espalhamento em destruir a fase inicial. O

comprimento de relaxação de fase, para bons condutores, é dado por

$$l_\varphi = v_F \tau_\varphi. \quad (2.5)$$

Para semicondutores e filmes policristalinos, por exemplo, é dado por

$$l_\varphi^2 = D \tau_\varphi. \quad (2.6)$$

em que $D = v_F^2 \tau_m / d$ é o coeficiente de difusão e d é a dimensão do gás de elétrons.

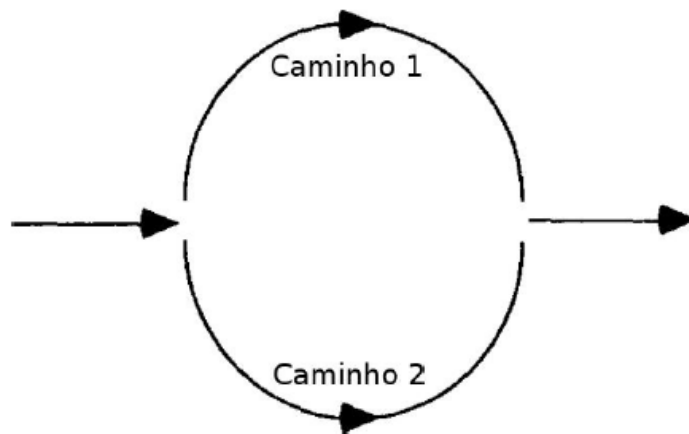


Figura 2.1: Ilustração conceitual de um experimento de interferência. Um feixe de elétrons é separado em dois caminhos distintos que se encontram logo em seguida. Figura retirada da ref. [1].

2.1.4 Comprimento de localização eletrônica (ϵ)

A função de onda de uma partícula confinada em uma região deve ser nula nas extremidades da cavidade. A amplitude da função de onda fornece a densidade de probabilidade de se encontrar a partícula em qualquer região do espaço e varia de forma bem particular dependendo do sistema e dos potenciais aos quais a partícula é submetida [10]. O comprimento de localização eletrônica mede a extensão espacial das funções de onda eletrônicas. Estas funções se estendem sobre toda a amostra para condutores metálicos e decaem exponencialmente em isolantes.

2.2 Regimes de transporte

Os regimes de transporte podem ser definidos por meio da relação entre o comprimento da amostra L e os comprimentos característicos. Por meio desses regimes podemos identificar como os elétrons são deslocados através de um sistema. Existem três tipos de regimes de transporte: regime balístico, regime difusivo e regime localizado. A seguir descreveremos cada um deles.

- *Regime balístico*: quando os elétrons se deslocam livremente, sem sofrer espalhamento elástico e acontece em geral para $L < l_m$.
- *Regime difusivo*: ocorre quando $l_m < L < \varepsilon$. Neste caso, o elétron sofre diversos espalhamentos elásticos ao percorrer o sistema.
- *Regime localizado*: ocorre quando $\varepsilon < L < l_\phi$, o elétron apresenta uma probabilidade menor de percorrer toda a estrutura. Assim, o sistema se comporta como isolante e uma vez que o elétron não sofre deslocamentos relativamente altos, está menos susceptível a espalhamentos.

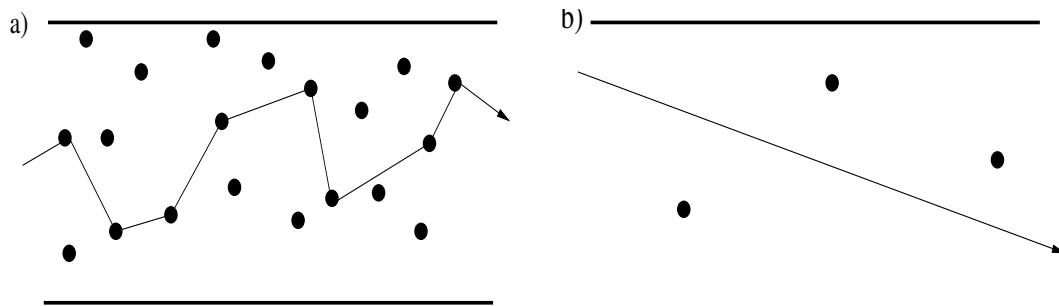


Figura 2.2: Ilustração dos regimes de transporte: a) difusivo e b) balístico.

2.3 Ponto de contato quântico

O ponto de contato quântico é o sistema mesoscópico mais simples que existe, e pode ser visualizado na figura 2.3. Ele consiste de uma pequena e fina constrição, comparada com o comprimento de onda de Fermi, a qual separa duas regiões condutoras onde o transporte é

praticamente balístico. Podemos estudar o ponto de contato quântico por uma modelagem analoga a guias de onda bidimensional, que representa a constrição, conectada a dois reservatórios de elétrons que representam os contatos [11], como ilustrado na figura 2.4.

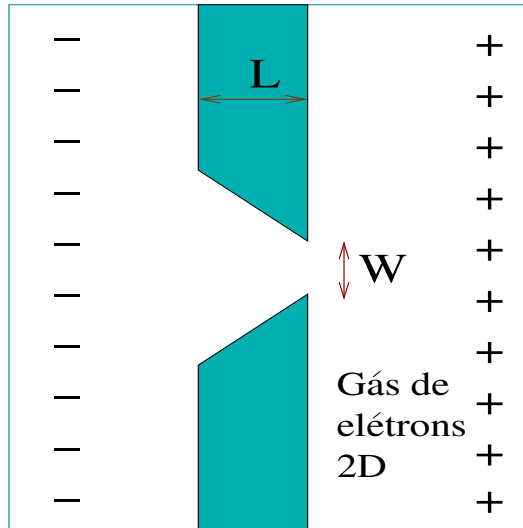


Figura 2.3: Esquema de ponto de contato quântico formado por uma constrição de largura L e abertura de tamanho W , destinada à passagem de elétrons provenientes dos contatos nos lados esquerdo e direito.

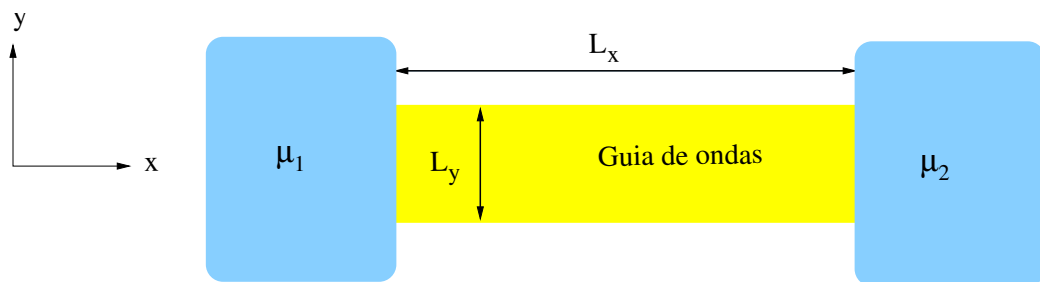


Figura 2.4: Modelo de ponto de contato quântico com guia de ondas conectada a dois reservatórios de elétrons, caracterizados por seus respectivos potenciais eletroquímicos, μ_1 e μ_2 .

No caso clássico, um condutor ideal não oferece dificuldades para que os elétrons fluam, de modo a possuir condutância infinita. Porém, se o sistema possui alguma de suas dimensões reduzidas à ordem do comprimento de relaxação de fase, o espalhamento dos elétrons torna-se evidente, o que contribui para manter a condutância finita. Aqui, consideramos que não há interações entre os elétrons, e assim, podemos tratar a região

condutora como um gás bidimensional de elétrons. Considerando que a temperatura absoluta é nula e que não há reflexão no guia de ondas, os elétrons possuirão energia no intervalo $\mu_1 < E < \mu_2$, onde μ_i representa o potencial químico do reservatório i e é igual a energia de Fermi do respectivo reservatório quando $T = 0$ [1].

Para o estado de equilíbrio, os estados disponíveis no condutor são preenchidos de acordo com a distribuição de Fermi-Dirac:

$$f_0(E) = \frac{1}{1 + \exp[(E - \mu)/k_B T]} \quad (2.7)$$

Em baixas temperaturas, podemos aproximar a distribuição por seu valor em temperatura nula:

$$f_0(E) = \vartheta(\mu - E) = \begin{cases} 0, & \text{se } \mu < E \\ 1, & \text{se } \mu > E \end{cases}. \quad (2.8)$$

Para o ponto de contato quântico mostrado anteriormente, iremos definir as coordenadas x e y nas direções horizontal e vertical, respectivamente, de modo que, os elétrons estão livres para percorrer o guia na direção \hat{x} com níveis contínuos de energia ($L_x \gg \lambda_F$), enquanto estão confinados na direção \hat{y} onde apresentam níveis quantizados de energia ou subbandas (um sistema cuja energia é contínua em função de uma variável e quantizada em função de outra possui estados quantizados se fixarmos a primeira variável; estes níveis quantizados são chamados subbandas). Então, um elétron neste sistema é representado pela função de onda:

$$\Psi(x, y) = \phi(y) e^{ik_x x}, \quad (2.9)$$

a qual fornece os seguintes valores de energia:

$$E_n(k_x) = E_n + \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m}, \quad (2.10)$$

em que k_x é o vetor de onda horizontal e E_n representa os subníveis de energia que correspondem à n -ésima subbanda na direção vertical.

Na figura 2.5 podemos observar os níveis de energia das subbandas em função de k_x . Admitimos que o elétron não pode ser transmitido através de um canal (ou modo normal) se sua energia for menor que a energia da subbanda referente a este canal. Os canais que possuem

energias maiores que a energia do elétron mais energético são ditos canais proibidos ou fechados¹. Os canais que possuem energias menores ou iguais à energia do elétron mais energético incidente são ditos canais abertos.

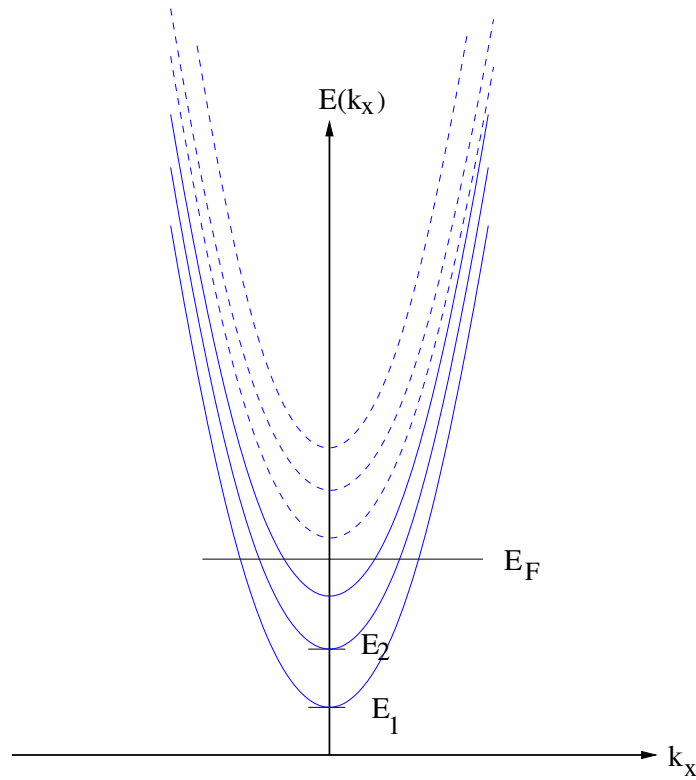


Figura 2.5: Representação com as energias das subbandas, dadas pela eq. (2.10). Quando $T = 0$, o potencial químico μ_i do reservatório i é igual à sua energia de Fermi E_F que corresponde à energia do elétron mais energético deste reservatório. As linhas tracejadas representam as energias dos canais fechados. O gráfico mostra o caso em que há três canais abertos.

O sinal da velocidade, bem como do vetor de onda, indicam de onde o elétron partiu. Os elétrons que são provenientes de reservatórios diferentes possuem velocidades com sinais opostos, de modo que, os estados positivos de k_x são preenchidos de forma que a energia máxima seja o potencial químico do reservatório 1 (μ_1), na medida que os estados negativos de k_x são preenchidos até que a energia máxima seja o potencial químico do reservatório 2

¹Na realidade, todos os canais possuem uma probabilidade de transmitir um elétron, ainda que sua energia seja maior que a do elétron incidente, caso em que há tunelamento. Porém, por simplicidade, considera-se que esta probabilidade é nula por ser muito pequena.

(μ_2) .

Esses elétrons possuem densidade de estados dada por $\rho(E)$, onde

$$\rho(E)dE = \frac{\text{Número de estados entre } E \text{ e } E + dE}{\text{Comprimento total}} = u(k_x)dk_x, \quad (2.11)$$

em que o comprimento total é L_x e o intervalo entre E e $E + dE$ compreende os números de onda entre k_x e $k_x + dk_x$. O número de estados numa variação dk_x do número de onda é calculado dividindo-se este comprimento no espaço k_x pelo comprimento $\Delta k_x = \frac{2\pi}{L_x}$ que cada estado ocupa:

$$u(k_x)dk_x = \frac{s}{L_x} \frac{dk_x}{2\pi/L_x} = \frac{1}{\pi} dk_x, \quad (2.12)$$

em que $s = 2$ é o fator de degenerescência de spin. De $E = \frac{k_x^2 \hbar^2}{2m}$, obtemos que:

$$dk_x = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} \frac{dE}{2\sqrt{E}} = \frac{dE}{2} \frac{2m}{\hbar^2 k_x} = \left(\frac{\partial E}{\partial k} \right)^{-1} dE$$

que fornece através das equações (2.11) e (2.12) a densidade de estados eletrônicos:

$$\rho = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\partial E}{\partial k} \right)^{-1}. \quad (2.13)$$

Através dessa densidade de estados e a distribuição (2.8), podemos calcular a contribuição da n -ésima subbanda na corrente proveniente do reservatório 1, com valores positivos de k_x :

$$\begin{aligned} I_n^+ &= e \int_{E_n}^{\infty} v(E) \rho(E) f_0(E) dE = e \int_{E_n}^{\mu_1} \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E}{\partial k} \frac{1}{\pi} \left(\frac{\partial E}{\partial k} \right)^{-1} dE \\ &= \frac{2e}{h} (\mu_1 - E_n). \end{aligned}$$

De modo análogo, obtemos a contribuição da n -ésima subbanda na corrente proveniente do reservatório 2, agora para valores negativos de k_x :

$$\begin{aligned}
I_n^- &= e \int_{E_n}^{\infty} v(E) \rho(E) f_0(E) dE = e \int_{E_n}^{\mu_2} \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E}{\partial k} \frac{1}{\pi} \left(\frac{\partial E}{\partial k} \right)^{-1} dE \\
&= \frac{2e}{h} (\mu_2 - E_n).
\end{aligned}$$

A corrente resultante é obtida ao fazermos a soma de todas as diferentes contribuições sobre todos os N canais abertos. Então:

$$I = \sum_{n=1}^N \frac{2e}{h} (\mu_1 - \mu_2) = N \frac{2e}{h} (\mu_1 - \mu_2). \quad (2.14)$$

Como $\mu = e \times V$, podemos reescrever a eq. acima como:

$$I = N \frac{2e^2}{h} (V_1 - V_2). \quad (2.15)$$

Da eq. (2.15) encontramos a condutância de um sistema balístico:

$$G = \frac{2e^2}{h} N = G_0 N, \quad (2.16)$$

onde $G_0 = \frac{2e^2}{h}$ é o quantum de condutância. Ao contrário do que acontece com sistemas macroscópicos, neste sistema o comportamento da condutância é quantizado.

Para um sistema formado por um número qualquer de guias submetidos a potências V_k , a expressão para a corrente satisfaz a relação de Büttiker [12]:

$$\frac{h}{2e^2} I_k = (N_k - R_{kk}) V_k - \sum_{l \neq k} T_{kl} V_l, \quad k = 1, 2, 3, \quad (2.17)$$

em que N_k é o número de canais abertos, T_{kl} é a transmitância do guia l para o guia k e R_{kk} a reflectância do guia k . Tanto a transmitância quanto a reflectância serão definidas mais adiante. No segundo membro da eq. anterior, a parte que envolve N_k é referente ao encontrado na relação de Landauer, onde a corrente é proporcional ao número de canais. No entanto, parte da onda é refletida, contribuindo para a diminuição da corrente no guia (interferência destrutiva). O segundo termo é referente a transmissão de outros guias.

2.4 Ponto quântico caótico

Caos, no estudo de sistemas dinâmicos, significa que o sistema apresenta forte sensibilidade às condições iniciais, ou seja, uma pequena mudança no início de um evento qualquer pode trazer consequências enormes no futuro. O comportamento do sistema no espaço de fase determina se este é caótico ou não. Se a separação entre duas curvas consecutivas quaisquer do espaço de fase cresce exponencialmente com o tempo, então o sistema é considerado caótico. A taxa com que esta separação cresce é chamada de expoente de Lyapunov [13, 14, 15]. O fato de os elétrons serem espalhados de diversas formas diferentes favorece a desordem de sua dinâmica. Neste caso, a imperfeição das paredes que delimitam o movimento das partículas proporciona desordem na relação entre suas distâncias, por exemplo. Para o caso desordenado, a distância entre as partículas pode ser descrita por

$$d = e^{\lambda_L t} |\delta\theta_0|,$$

onde $\delta\theta_0$ é a diferença entre os ângulos iniciais das partículas e λ_L é o expoente de Lyapunov.

Quando a mecânica quântica é considerada, o espaço de fase da mecânica clássica perde seu sentido, bem como, a noção do que seria o caos. No entanto, pode-se relacionar uma dinâmica regular ou irregular no regime quântico com uma dinâmica regular ou irregular no regime clássico, respectivamente. Essa característica na mecânica quântica pode se apresentar no comportamento dos níveis energéticos ou na própria amplitude da função de onda, por exemplo.

Em um ponto quântico, o elétron entra na cavidade e permanece um tempo $\tau_{perm.}$ interagindo com as paredes ou elétrons ou potenciais. Os pontos quânticos possuem muitos graus de liberdade, fato que agregado às diferenças nas formas de seus contornos, gera flutuações na condutância. Se $\tau_{perm.}$ é grande comparado ao tempo ergódico $\tau_{erg.}$, os espalhamentos caóticos dos elétrons possuem caráter universal. Essa condição é necessária para que a média temporal da condutância possa ser representada pela média sobre o *ensemble* das matrizes aleatórias, a qual será abordada no próximo capítulo.

2.5 A fórmula de Landauer

A fórmula de Landauer [17] relaciona a condutância com as propriedades de espalhamento sofridas pelos elétrons ao fluírem através de um condutor mesoscópico. Devido a baixa dimensão do sistema, a característica ondulatória dos elétrons torna-se evidente, de modo que, o processo de condução dos elétrons é melhor representado por um processo de transmissão da função de onda que os descreve.

Vamos considerar os espalhamentos que ocorrem em um ponto quântico. Este exemplo é o mais simples possível, contendo apenas um centro espalhador de elétrons. As amplitudes das funções de onda desses elétrons estão relacionadas com as correntes no ponto quântico. O elétron possui uma probabilidade T_n de ser transmitido no guia n . Então, as equações para a corrente e a condutância para o caso sem espalhamento devem ser multiplicadas por este fator. Portanto,

$$I = \sum_{n=1}^N \frac{2e}{h} T_n (\mu_1 - \mu_2) \quad \text{e} \quad G = G_0 \sum_{n=1}^N T_n \quad (2.18)$$

a qual é conhecida como relação de Landauer. Em geral, T_n varia com o canal. Mas é possível considerá-los iguais se a diferença de potencial entre os reservatórios for pequena ($T_n = T \implies \sum_{n=1}^N T_n = NT$), que simplifica as equações acima:

$$I = \frac{2e}{h} NT (\mu_1 - \mu_2) \quad \text{e} \quad G = G_0 NT \quad .$$

Para o caso geral, com um número qualquer de contatos, a corrente é relacionada através de uma matriz de condutância.

As figuras 2.6.a e 2.6.b mostram, respectivamente, o esquema de um ponto quântico balístico simples, o qual é delimitado por dois pontos de contato e sua modelagem através de um centro espalhador conectado a dois guias de onda, que são conectados a reservatórios de elétrons de potenciais μ_1 e μ_2 .

2.6 Matriz de espalhamento

A matriz de espalhamento [18] (ou matriz **S**) é responsável por toda a informação do transporte eletrônico no sistema mesoscópico. A matriz de espalhamento aplicada nas amplitudes de onda incidente fornece as amplitudes de onda espalhadas. Sendo assim, ela

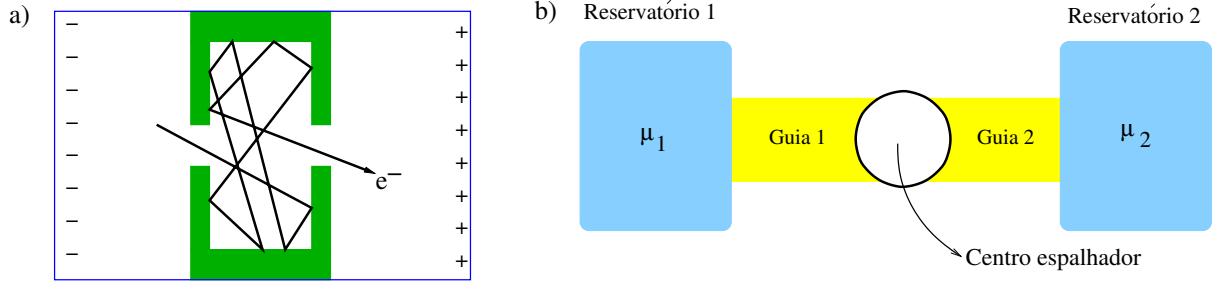


Figura 2.6: (a) Esquema do ponto quântico balístico simples, delimitado por dois pontos de contato; (b) sua modelagem através de um centro espalhador conectado a dois guias de onda, que são conectados a reservatórios de elétrons.

contém os coeficientes de transmissão e reflexão do sistema. Temos que as amplitudes das ondas que saem da região de espalhamento para cada um dos guias dependem das amplitudes de todas as ondas incidentes. Considere:

- O α -ésimo canal do j -ésimo guia denotado por ${}^{\alpha}C_j$;
- a_j^{α} e b_j^{α} as amplitudes das ondas que entram e saem, respectivamente, da região de espalhamento através do α -ésimo canal do j -ésimo guia;
- ${}^{pq}r_{jj}$ e ${}^{pq}t_{ij}$ coeficientes que determinam, respectivamente, a amplitude da onda refletida do q -ésimo para o p -ésimo canal no j -ésimo guia e a amplitude da onda transmitida do q -ésimo canal do j -ésimo guia para o p -ésimo canal do i -ésimo guia.

Vamos considerar inicialmente o caso apresentado na figura 2.7.a. A amplitude da onda incidente no canal 1C_1 é 1a_1 . Parte dessa onda é refletida após os espalhamentos no centro espalhador com amplitude ${}^{11}r_{11} \times {}^1a_1$. A outra parte é transmitida ao canal 1C_2 com amplitude ${}^{11}t_{21} \times {}^1a_1$. No canal 1C_2 , parte da onda incidente com amplitude 1a_2 é refletida com amplitude ${}^{11}r_{22} \times {}^1a_2$. A outra parte é transmitida ao canal 1C_1 com amplitude ${}^{11}t_{12} \times {}^1a_2$. A onda resultante que sai do centro espalhador através do canal 1C_1 tem amplitude 1b_1 , igual a soma da amplitude da onda refletida neste canal com a amplitude transmitida no canal 1C_2 , dada por:

$${}^1b_1 = {}^{11}r_{11} \times {}^1a_1 + {}^{11}t_{12} \times {}^1a_2. \quad (2.19)$$

Da mesma forma, obtemos a amplitude da onda resultante que sai no canal 1C_2 :

$${}^1b_2 = {}^{11}r_{22} \times {}^1a_2 + {}^{11}t_{21} \times {}^1a_1. \quad (2.20)$$

As equações (2.19) e (2.20) podem ser escritas na forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} {}^1b_1 \\ {}^1b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{11}r_{11} & {}^{11}t_{12} \\ {}^{11}t_{21} & {}^{11}r_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^1a_1 \\ {}^1a_2 \end{pmatrix} = \mathbf{S} \begin{pmatrix} {}^1a_1 \\ {}^1a_2 \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

em que a matriz \mathbf{S} é definida como a matriz de espalhamento.

Agora considerando o caso da figura 2.7.b, onde foi adicionado mais um canal 2C_1 ao guia da esquerda, obtemos as seguintes equações:

$$\begin{aligned} {}^1b_1 &= {}^{11}r_{11} \times {}^1a_1 + {}^{12}r_{11} \times {}^1a_2 + {}^{11}t_{12} \times {}^1a_2 \\ {}^2b_1 &= {}^{21}r_{11} \times {}^1a_1 + {}^{22}r_{11} \times {}^1a_2 + {}^{21}t_{12} \times {}^1a_2 \\ {}^1b_2 &= {}^{11}t_{21} \times {}^1a_1 + {}^{12}t_{21} \times {}^1a_2 + {}^{11}r_{22} \times {}^1a_2 \end{aligned} \quad (2.22)$$

das quais obtemos:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} {}^{11}r_{11} & {}^{12}r_{11} & {}^{11}t_{12} \\ {}^{21}r_{11} & {}^{22}r_{11} & {}^{21}t_{12} \\ {}^{11}t_{21} & {}^{12}t_{21} & {}^{11}r_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{11} & \mathbf{t}_{12} \\ \mathbf{t}_{21} & \mathbf{r}_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Na figura 2.7.c temos o caso em que foi adicionado ao anterior um guia de três canais. Neste caso, a matriz \mathbf{S} possui três blocos matriciais \mathbf{r}_{ii} e seis blocos \mathbf{t}_{ij} . A situação geral é mostrada na figura 2.7.d, que ocorre quando o sistema possui um número n de guias, cada um com α_n canais. Então a matriz de espalhamento possui a seguinte forma:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{11} & \mathbf{t}_{12} & \cdots & \mathbf{t}_{1n} \\ \mathbf{t}_{21} & \mathbf{r}_{22} & & \mathbf{t}_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{t}_{n1} & \mathbf{t}_{n2} & \cdots & \mathbf{r}_{nn} \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

Vale salientar que a matriz \mathbf{S} é sempre uma matriz quadrada cuja ordem é o somatório do número de canais α_n de todos os n guias. Além disso, ela é unitária, ou seja, $\mathbf{S}^\dagger \mathbf{S} = \mathbb{I}$ (ver apêndice B), condição obtida pela conservação de probabilidade:

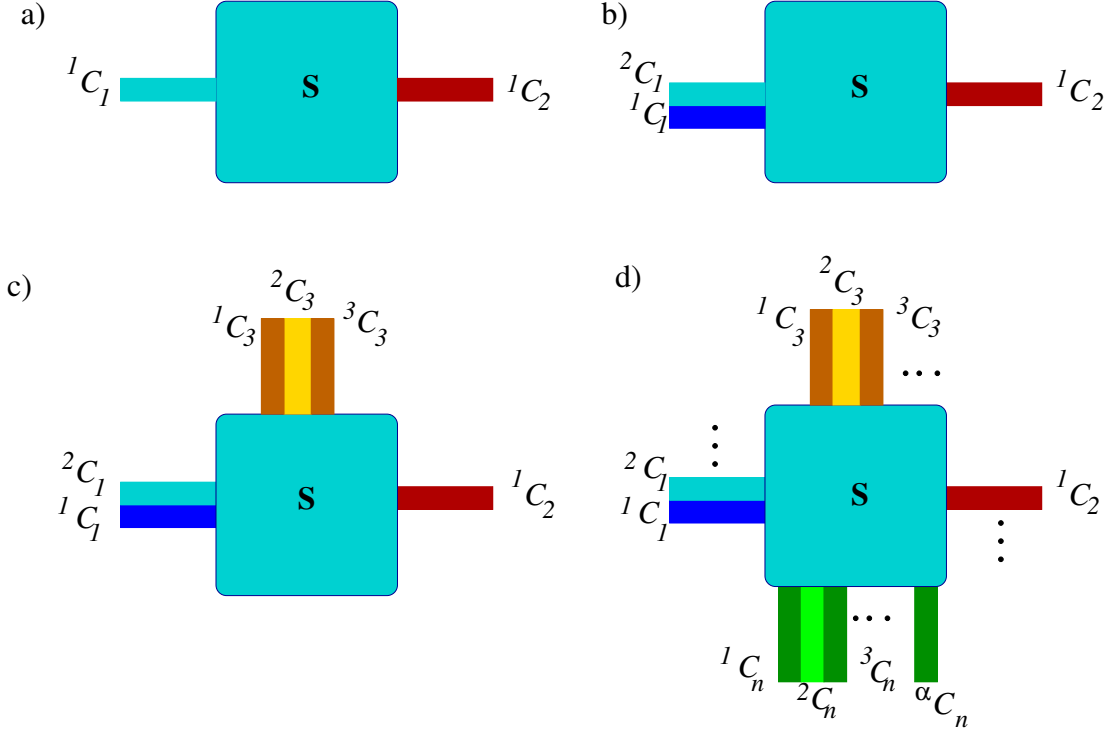


Figura 2.7: (a) Representação de dois guias de apenas um canal; (b) um guia de dois canais e um guia de um canal; (c) três guias com um, dois e três canais; (d) n guias, cada um com um número qualquer de canais (situação geral).

$$\mathbf{S}^\dagger \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{11}^\dagger & \mathbf{t}_{21}^\dagger & \cdots & \mathbf{t}_{n1}^\dagger \\ \mathbf{t}_{12}^\dagger & \mathbf{r}_{22}^\dagger & & \mathbf{t}_{n2}^\dagger \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{t}_{1n}^\dagger & \mathbf{t}_{2n}^\dagger & \cdots & \mathbf{r}_{nn}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{11} & \mathbf{t}_{12} & \cdots & \mathbf{t}_{1n} \\ \mathbf{t}_{21} & \mathbf{r}_{22} & & \mathbf{t}_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{t}_{n1} & \mathbf{t}_{n2} & \cdots & \mathbf{r}_{nn} \end{pmatrix} = \mathbb{I}.$$

em que \mathbb{I} é a matriz identidade.

Os elementos da diagonal dessa multiplicação fornecem a seguinte expressão:

$$\mathbf{r}_{kk}^\dagger \mathbf{r}_{kk} + \sum_{l \neq k} \mathbf{t}_{lk}^\dagger \mathbf{t}_{lk} = \mathbb{I}_{N_k}, \quad (2.25)$$

em que \mathbb{I}_{N_k} é a matriz identidade de ordem N_k . Podemos observar que a eq. (2.25) implica na conservação de probabilidade em um canal, isto é, a amplitude de onda incidente na cavidade através de um canal é igual a soma das amplitudes por ele refletido e transmitido. As quantidades $T_{ij} = \text{tr}(\mathbf{t}_{ij} \mathbf{t}_{ij}^\dagger)$ e $R_{ii} = \text{tr}(\mathbf{r}_{ii} \mathbf{r}_{ii}^\dagger)$ representam, respectivamente, a transmitância do

elétron do guia j para o guia i e a reflectância do elétron em um canal i . Então,

$$\text{tr}(\mathbf{r}_{ii}\mathbf{r}_{ii}^\dagger) + \sum_{l \neq k} \text{tr}(\mathbf{t}_{ij}\mathbf{t}_{ij}^\dagger) = \text{tr}(\mathbb{I}_{N_k}) \Rightarrow R_{kk} + \sum_{l \neq k} T_{lk} = N_k. \quad (2.26)$$

Dessa forma, a relação de Büttiker dada pela eq. (2.17) pode ser escrita como:

$$\frac{h}{2e^2} I_k = \sum_{l \neq k} (T_{lk} V_k - T_{kl} V_l). \quad (2.27)$$

No caso em que os guias são submetidos a potenciais iguais, a corrente que fluirá será nula. Essa condição de contorno permite simplificar a eq. (2.27) [1]:

$$0 = \sum_{l \neq k} (T_{lk} V - T_{kl} V) \Rightarrow \sum_{l \neq k} T_{lk} = \sum_{l \neq k} T_{kl}. \quad (2.28)$$

Esta relação indica que a probabilidade de um elétron ser transmitido de um guia qualquer para um determinado guia é a mesma de um elétron ser transmitido de um determinado guia para um guia qualquer, ou seja, a probabilidade de chegada de um elétron é igual à probabilidade de saída.

2.7 Associação de centros espalhadores

Classicamente, é comum associar componentes elétricos similares, o que torna possível suas substituições por um único componente equivalente ou resultante. Usando esse tipo de substituição podemos simplificar o circuito e calcular com mais facilidade seus parâmetros. As duas combinações básicas que permitem esse tipo de substituição são: em série e/ou paralelo. As relações para obtermos, por exemplo, a resistência equivalente da associação de resistências em série é a soma delas, $R_{eq} = \sum_i R_i$. Já para resistências em paralelo, a equivalente é o inverso da soma dos inversos de cada uma, $R_{eq} = (\sum_i R_i^{-1})^{-1}$.

Quanticamente, no entanto, essas relações não são válidas. Os elementos que formam os circuitos são centros espalhadores. Cada centro espalhador é caracterizado por uma matriz de espalhamento. Um grupo de centros espalhadores pode ser simplificado ao agruparmos as matrizes de espalhamento em uma única matriz efetiva que deve ser unitária, pois, ainda há a conservação de carga no sistema. A seguir descreveremos as associações de centros espalhadores, baseados na ref. [19].

2.7.1 Associação em paralelo

Considere o sistema ilustrado na figura 2.8.a. Os centros espalhadores são caracterizados por suas matrizes de espalhamento e pelo número de canais em cada um dos guias. A matriz de espalhamento de cada centro espalhador j é dada por

$$\mathbf{S}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_j & \mathbf{t}'_j \\ \mathbf{t}_j & \mathbf{r}'_j \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Queremos reduzir este sistema para um centro de espalhamento efetivo, como mostrado na figura 2.8.b. Para obter essa simplificação definimos a seguinte operação de dois centros espalhadores em paralelo:

$$\mathbf{S}_\alpha \otimes \mathbf{S}_\gamma = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_\alpha & \mathbf{0} & \mathbf{t}'_\alpha & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{r}_\gamma & \mathbf{0} & \mathbf{t}'_\gamma \\ \mathbf{t}_\alpha & \mathbf{0} & \mathbf{r}'_\alpha & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{t}_\gamma & \mathbf{0} & \mathbf{r}'_\gamma \end{pmatrix}.$$

Se as matrizes de espalhamento \mathbf{S}_α e \mathbf{S}_γ são unitárias, então a matriz resultante da associação também é: $(\mathbf{S}_\alpha \otimes \mathbf{S}_\gamma)(\mathbf{S}_\alpha \otimes \mathbf{S}_\gamma)^\dagger = 1$, confirmando a conservação de carga.

Desse modo, para associar um sistema com L centros espalhadores, realiza-se a operação com as duas primeiras matrizes de espalhamento. A matriz resultante é associada com a matriz do terceiro centro, e assim sucessivamente até a L -ésima matriz ser utilizada. O resultado final é a matriz de espalhamento efetiva do sistema.

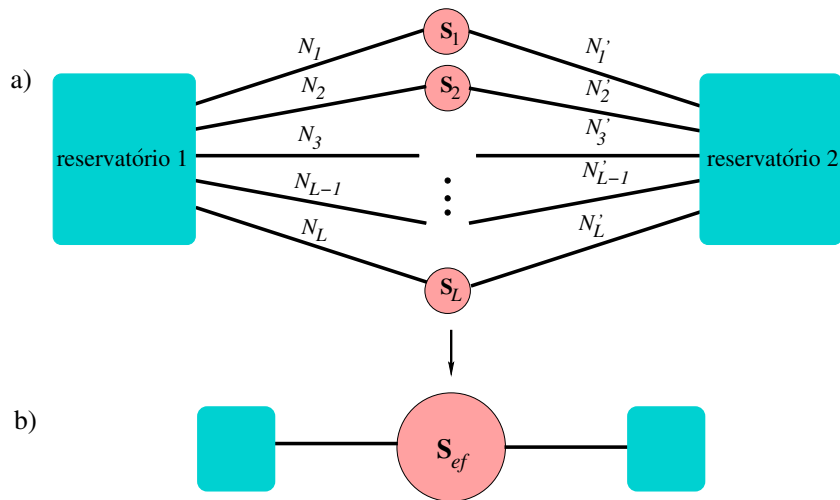


Figura 2.8: Esquema da associação em paralelo de centros espalhadores. Em (a) L centros espalhadores em paralelo e em (b), centro espalhador efetivo.

2.7.2 Associação em série

Para obtermos a matriz de espalhamento efetiva de dois centros espalhadores em série α e γ , usamos a seguinte fórmula:

$$\mathbf{S}_\alpha \bullet \mathbf{S}_\gamma = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_\alpha + \mathbf{t}'_\alpha [(\mathbf{1} - \mathbf{r}_\gamma \mathbf{r}'_\alpha)^{-1}] \mathbf{r}_\gamma \mathbf{t}_\alpha & \mathbf{t}'_\alpha [(\mathbf{1} - \mathbf{r}_\gamma \mathbf{r}'_\alpha)^{-1}] \mathbf{t}'_\gamma \\ \mathbf{t}_\gamma [(\mathbf{1} - \mathbf{r}'_\alpha \mathbf{r}_\gamma)^{-1}] \mathbf{t}_\alpha & \mathbf{r}'_\gamma + \mathbf{t}_\gamma [(\mathbf{1} - \mathbf{r}'_\alpha \mathbf{r}_\gamma)^{-1}] \mathbf{r}'_\alpha \mathbf{t}'_\gamma \end{pmatrix}, \quad (2.30)$$

onde α (γ) representa o centro espalhador da esquerda (direita). A matriz de espalhamento efetiva de L centros pode ser obtida por se fazer a associação dois a dois [19]. A demonstração da eq. (2.30) pode ser encontrada na ref. [3].

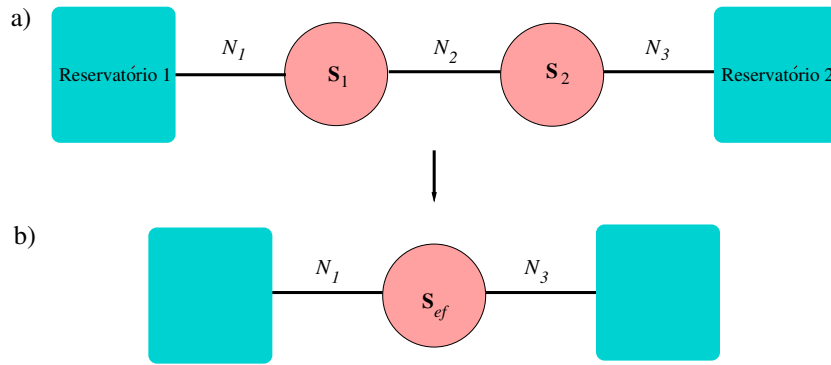


Figura 2.9: Esquema da associação em série de centros espalhadores. Em (a) dois centros espalhadores em série e em (b), centro espalhador efetivo.

2.8 Sumário

Neste capítulo fizemos uma breve revisão sobre a física mesoscópica apresentando os comprimentos característicos mais importantes para o transporte quântico. Mostramos que o sistema mesoscópico mais simples trata-se do ponto de contato quântico, o qual apresentou o efeito de quantização da condutância. Foi introduzido o conceito de probabilidade de transmissão, que está relacionado com os espalhamentos que o elétron sofre em um ponto quântico. Esses espalhamentos podem ser representados pela matriz de espalhamento (ou matriz \mathbf{S}). Vimos ainda como fazer a associação de múltiplos centros espalhadores. Como os elétrons apresentam espalhamentos aleatórios, será possível estabelecer o *ensemble* de matrizes aleatórias, que será abordado no próximo capítulo.

Capítulo 3

A teoria de matrizes aleatórias

A teoria de matrizes aleatórias (TMA) [20, 21] foi desenvolvida pelo físico e matemático Eugene Wigner em 1957, com o objetivo inicial de estudar os níveis de energia dos núcleos pesados no campo da física nuclear [22]. A TMA emprega-se em diversas áreas da ciência como sistemas magnéticos desordenados, excitação nuclear, teoria da informação, finanças e caos quântico [23], este último abordado na presente dissertação. Uma vez que os elétrons estejam confinados, em um sistema que apresenta caos, seus estados são imprevisíveis, ou seja, não se tem mais controle sobre eles. Sendo assim, o comportamento desses estados passa a ser aleatório.

Apesar de todo transporte de cargas poder ser descrito por um Hamiltoniano (\mathbf{H}) [24], este formalismo torna-se inviável nos casos em que há espalhamento, pois os elétrons podem ser espalhados de diversas formas diferentes. Podemos, porém, tratar esse problema através de matrizes hamiltonianas aleatórias, que pertencem a um *ensemble* denominado *ensemble* gaussiano, o qual possui classes de universalidade que dependem de vínculos e simetrias da cavidade. As classes mais comuns são as de Wigner-Dyson. São elas: classe ortogonal, classe unitária e classe simplética. De modo alternativo, pode-se estudar o problema através de matrizes de espalhamento aleatórias. Essas matrizes são de fundamental importância para o estudo das propriedades do transporte eletrônico. As matrizes aleatórias já possuem todas as informações sobre o transporte, não sendo necessário conhecer \mathbf{H} . Essas matrizes pertencem ao *ensemble* circular [25, 26] o qual possui as mesmas três classes de universalidade de Wigner-Dyson.

3.1 Invariância sob reversão temporal

Na mecânica quântica o operador de reversão temporal tem a seguinte forma

$$\mathbf{T} = \mathbf{K}\mathbf{C}, \quad (3.1)$$

onde \mathbf{K} é um operador unitário¹ fixo e \mathbf{C} o operador que toma o complexo conjugado da expressão que o sucede. Assim, um estado sob reversão temporal pode ser escrito como

$$\psi^R = \mathbf{T}\psi = \mathbf{K}\mathbf{C}\psi = \mathbf{K}\psi^*. \quad (3.2)$$

Pela condição de invariância de reversão temporal, $\langle \phi | \mathbf{A} | \psi \rangle = \langle \psi^R | \mathbf{A}^R | \phi^R \rangle$ e usando as equações (3.1) e (3.2), pode-se deduzir que a transformação sob reversão temporal de um operador \mathbf{A} é

$$\mathbf{A}^R = \mathbf{K}\mathbf{A}^T\mathbf{K}^{-1}, \quad (3.3)$$

onde \mathbf{A}^T é a transposta de \mathbf{A} e \mathbf{K}^{-1} é a matriz inversa referente ao operador \mathbf{K} . Um operador \mathbf{A} é autodual se $\mathbf{A} = \mathbf{A}^R$. Se um sistema é invariante sob reversão temporal, seu hamiltoniano é autodual, isto é,

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^R. \quad (3.4)$$

A aplicação dupla da transformação de reversão temporal deve retornar o estado inicial, podendo haver apenas a introdução de uma fase no estado. Então,

$$\mathbf{T}^2 = \mathbf{K}\mathbf{C}(\mathbf{K}\mathbf{C}) = \mathbf{K}\mathbf{K}^* = \alpha\mathbb{I}, \quad |\alpha| = 1. \quad (3.5)$$

Entretanto, como o operador \mathbf{K} é unitário,

$$\begin{aligned} \mathbf{K}\mathbf{K}^* &= \alpha\mathbf{K}^T\mathbf{K}^* \implies \mathbf{K} = \alpha\mathbf{K}^T \\ \implies \mathbf{K} &= \alpha(\alpha\mathbf{K}^T)^T = \alpha^2\mathbf{K} \implies \boxed{\alpha = \pm 1}. \end{aligned}$$

¹Um operador \mathbf{K} é dito unitário se $\mathbf{K}^\dagger = \mathbf{K}^{-1} \implies \mathbf{K}^\dagger\mathbf{K} = \mathbb{I}$. Aplicando-se a transposta nos dois lados dessa expressão, obtém-se $\mathbf{K}^T\mathbf{K}^* = \mathbb{I}$ (consequência da unitariedade de \mathbf{K}).

Portanto, a matriz unitária \mathbf{K} pode ser simétrica ($\mathbf{K}\mathbf{K}^* = +\mathbb{I}$) para os casos de spins inteiros (bósons), ou antissimétrica ($\mathbf{K}\mathbf{K}^* = -\mathbb{I}$), para os casos de spins semi-inteiros (férmions) [3, 20].

3.2 O ensemble circular

O *ensemble* circular de matrizes aleatórias foi introduzido por Dyson, em 1962. As matrizes que fazem parte desse *ensemble* são unitárias [27].

Assim como o *ensemble* gaussiano, o *ensemble* circular possui três classes de universalidade referentes à simetria e vínculos do sistema. São essas classes que determinam a forma das matrizes. Seja \mathbf{U}_β uma matriz pertencente ao *ensemble* circular, em que $\beta = 1, 2, 4$ é chamado de índice de simetria ou índice de Dyson. Os casos $\beta = 1$ e $\beta = 2$ correspondem, respectivamente, a presença e ausência de simetria de reversão temporal. Já para $\beta = 4$ temos o caso em que há forte espalhamento spin-órbita com simetria de reversão temporal.

As três classes do *ensemble* circular são:

Ensemble circular unitário (ECU): Para uma matriz pertencente a este ensemble não é necessária a imposição de reversão temporal. A única exigência para a matriz do ECU é que ela seja unitária, ou seja,

$$\mathbf{U}_2^{-1} = \mathbf{U}_2^\dagger. \quad (3.6)$$

Ensemble circular ortogonal (ECO): Neste caso, é necessária a imposição de simetria de reversão temporal e invariância sob rotação de spin (quando $\mathbf{K}\mathbf{K}^* = 1$), tendo a eq. (3.6) como válida. Assim, além de ser unitária a matriz do ECO deve ser simétrica:

$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_2^T \mathbf{U}_2. \quad (3.7)$$

Ensemble circular simplético (ECS): Este caso ocorre quando o sistema apresenta simetria de reversão temporal mas não possui invariância sob rotação de spin (quando $\mathbf{K}\mathbf{K}^* = -1$). Então, a matriz pertencente ao ECS deve ser unitária e autodual:

$$\mathbf{U}_4 = \mathbf{U}_2^R \mathbf{U}_2,$$

com \mathbf{U}^R dado pela eq. (3.3) e

$$\mathbf{K} = i \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 & \cdots \\ 0 & \sigma_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

onde cada elemento é um bloco 2×2 e σ_2 é uma das três matrizes de Pauli [3]:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3.3 Sumário

Vimos neste capítulo uma revisão sobre a teoria de matrizes aleatórias com ênfase na descrição da dinâmica caótica de pontos quânticos. Apresentamos o *ensemble* circular, o qual descreve a matriz de espalhamento do ponto quântico. Mostramos as classes de universalidade deste *ensemble*, que dependem das simetrias e vínculos do sistema.

No próximo capítulo utilizaremos o *ensemble* de matrizes aleatórias para a obtenção da condutância em um ponto quântico caótico.

Capítulo 4

Desenvolvimento do modelo estudado

Este capítulo mostra o modelo estudado analiticamente por Brouwer e Beenakker [12], o qual trata de um ponto quântico caótico (ou cavidade caótica) balístico com um guia de ondas fictício. Esse modelo, chamado de modelo do terceiro guia (ou modelo de guia fictício), simula um sistema com dois guias reais e um terceiro guia, sendo este fictício, cujo objetivo é justamente gerar decoerência de fase. Esses guias estão em contato com reservatórios de elétrons. A ref. [28] também utiliza esse modelo de decoerência e apresenta de maneira mais aprofundada as discussões feitas na ref. [12], no regime universal, isto é, quando o número de canais do guia fictício vai para o infinito.

Baseados na ref. [16], estudaremos também o modelo de decoerência de estube. Neste, o que causa decoerência no sistema já não é um reservatório fictício e sim outra cavidade caótica que interage com a primeira.

Já que, em ambos os casos, o ponto quântico é caótico, podemos utilizar as matrizes aleatórias para obter uma distribuição da condutância através de simulação computacional.

4.1 Modelo de guia fictício

O modelo de guia fictício (ou modelo GF), ilustrado na figura 4.1, é composto por três guias designados por números (1, 2, 3) e o número de canais em cada guia é representado por N_1 , N_2 e N_3 , respectivamente. Os potenciais dos guias 1, 2 e 3 são designados por V_1 , V_2 e V_3 .

O guia 3 (guia fictício) é submetido a um potencial tal que a corrente total que flui por ele seja nula, isto é, $I_3 = 0$. O objetivo do guia 3 é exclusivamente gerar decoerência de fase. A probabilidade de transmissão do elétron em cada um dos N_3 canais do guia 3 é representado pelo

fator de transparência $0 < \Gamma < 1$. A taxa de decoerência é definida por $\lambda = N_3\Gamma$ e indicará como será o comportamento caótico na cavidade, ou seja, quanto o guia 3 será efetivo na geração de decoerência de fase dos elétrons que forem transmitidos para a cavidade através dos guias 1 e 2. Também podemos escrever a taxa de decoerência da seguinte forma: $\lambda = 2\pi\hbar/\tau_\phi\Delta$, onde τ_ϕ é o tempo de decoerência e Δ o espaçamento de níveis na cavidade.

As correntes que passam nos guias 1 e 2 são iguais em módulo (conservação de cargas), mas de sinais opostos, $I_1 = -I_2$.

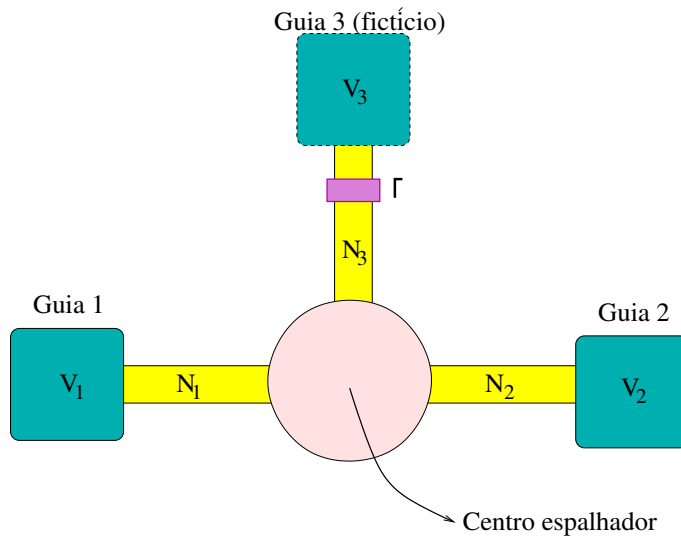


Figura 4.1: Esquema do ponto quântico com um guia fictício que ocasiona decoerência de fase do sistema.

Os elétrons são livres para fluir por qualquer um dos canais abertos¹, cada um possuindo uma probabilidade de transmitir um elétron. A expressão para a condutância deste sistema após a matriz de espalhamento efetiva² ser determinada é dada por:

$$G = \frac{2e^2}{h} \left(T_{12} + \frac{T_{13}T_{32}}{T_{31} + T_{32}} \right). \quad (4.1)$$

A demonstração da eq. (4.1) está no apêndice (A). Perceba que ao fazermos $\Gamma \rightarrow 0$, caso em que

¹Quando um elétron passa por um canal, significa que ele possui energia suficientemente alta para ser transmitido pela subbanda referente àquele canal.

²A matriz de espalhamento efetiva deve ser unitária, devido à conservação de cargas, e neste caso, para termos unitariedade devemos considerar os elementos do guia fictício.

nenhum elétron pode passar por este guia, as transmitâncias na eq. (4.1) referentes ao canal 3 tendem a se anular, ou seja, T_{13}, T_{31} e $T_{32} \rightarrow 0$, resultando na fórmula de Landauer (eq. (2.18)).

4.2 Modelo de estube

No modelo de decoerência de estube (ou modelo ST), representado na figura 4.2, temos um ponto quântico caótico cujos guias reais (guias 1 e 2) estão em contato com reservatórios de elétrons e o guia fictício está em contato com outra cavidade caótica. Dessa forma, o que está quebrando a fase do elétron não é mais um reservatório fictício e sim outra cavidade caótica que interage com a primeira. A probabilidade de transmissão do elétron em cada um dos N_3 canais do guia 3 também é representado pelo fator de transparência $0 < \Gamma < 1$. A taxa de decoerência será definida como $\xi = N_3\Gamma$. A matriz efetiva desse sistema também pode ser obtida utilizando-se o formalismo apresentado na seção (2.7). Ao contrário do modelo GF, as matrizes dos centros espalhadores são unitárias, de modo que, a matriz efetiva da associação também é unitária.

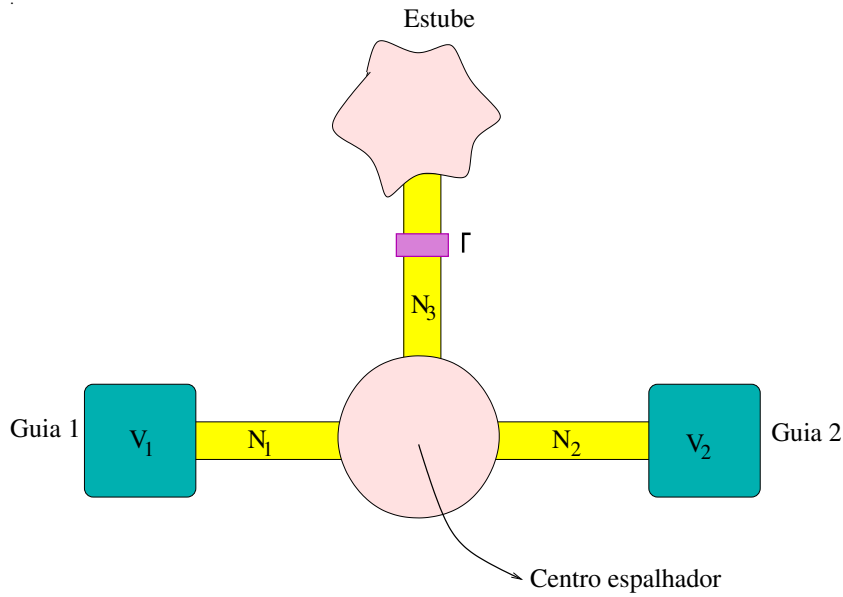


Figura 4.2: Esquema do ponto quântico com um estube, o qual ocasiona decoerência do sistema.

Então, a diferença deste modelo com o modelo GF é a unitariedade da matriz. Neste, a matriz efetiva é unitária e ela tem a mesma dimensão da matriz de um sistema em que há coerência de fase. Assim, as equações de Landauer e Büttiker continuam sendo as mesmas, não sendo necessário rededuzi-las, como acontece para o primeiro modelo.

4.3 Algoritmo

A matriz de espalhamento do centro espalhador, S_C , pode ser escrita como:

$$S_C = \begin{pmatrix} r_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & r_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & r_{33} \end{pmatrix}.$$

A transparência, Γ , possui um valor real que pertence ao intervalo entre 0 e 1. Devido a isto, o próprio valor da probabilidade de transmissão é atribuído a ela. Além disso, Γ pode ser interpretada como uma fonte de espalhamento em série com o centro espalhador, como ilustrado na figura 4.3.

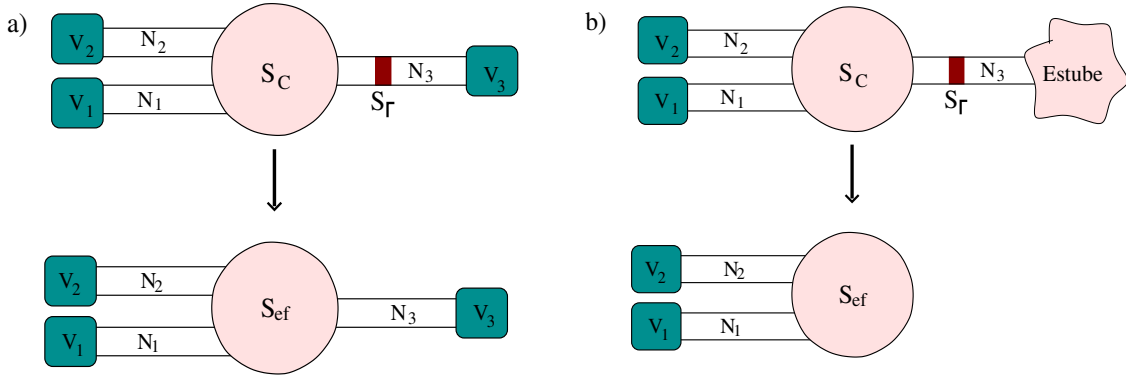


Figura 4.3: Esquema que mostra como as matrizes de espalhamento do centro da cavidade e da barreira podem ser associadas em série. Em (a) associação no modelo GF e em (b) associação no modelo ST. A figura também mostra as associações das matrizes de espalhamento que resultam em uma única matriz de espalhamento efetiva para os dois modelos.

Uma vez que, a transmitância não depende do sentido da corrente no guia, a matriz de espalhamento referente à transparência S_Γ deve ser simétrica. Então:

$$|t_\Gamma|^2 = \Gamma \implies t_\Gamma = e^{i\theta} \sqrt{\Gamma}.$$

Dáí obtemos a reflectância:

$$|r_\Gamma|^2 = 1 - |t_\Gamma|^2 = 1 - \Gamma \implies r_\Gamma = e^{i\phi} \sqrt{1 - \Gamma}.$$

A matriz de espalhamento \mathbf{S}_Γ pode ser escrita como:

$$\mathbf{S}_\Gamma = \begin{pmatrix} r_\Gamma \mathbb{I}_{N_3 \times N_3} & t_\Gamma \mathbb{I}_{N_3 \times N_3} \\ t_\Gamma \mathbb{I}_{N_3 \times N_3} & r_\Gamma \mathbb{I}_{N_3 \times N_3} \end{pmatrix}.$$

Como $\mathbf{S}_\Gamma^\dagger \mathbf{S}_\Gamma = \mathbb{I}$, obtemos a seguinte condição: $\theta - \phi = \frac{\pi}{2}$, onde θ e ϕ são arbitrários. Por simplificação faz-se $\theta = 0$ e $\phi = \frac{\pi}{2}$, assim, $t_\Gamma = \sqrt{\Gamma}$ e $r_\Gamma = i\sqrt{1-\Gamma}$. Portanto, \mathbf{S}_Γ obtém a forma

$$\mathbf{S}_\Gamma = \begin{pmatrix} i\sqrt{1-\Gamma} \times \mathbb{I}_{N_3 \times N_3} & \sqrt{\Gamma} \times \mathbb{I}_{N_3 \times N_3} \\ \sqrt{\Gamma} \times \mathbb{I}_{N_3 \times N_3} & i\sqrt{1-\Gamma} \times \mathbb{I}_{N_3 \times N_3} \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Para ambos os modelos, utilizaremos uma simulação computacional para estudar o comportamento da densidade de probabilidade $\rho(G)$ em função da condutância G . No modelo GF, primeiro será variado o número de canais do guia 3 (N_3) e sua transparência (Γ), mantendo-se o número de canais dos guias 1 e 2 fixos com $N_1 = N_2$. Em seguida, usando este modelo, analisaremos $\rho(G)$ em função de G variando-se N_3 e a taxa de decoerência λ . No modelo ST, também será variado o número de canais do guia 3 e a taxa de decoerência ξ , mantendo-se $N_1 = N_2$.

A dimensão das matrizes de espalhamento \mathbf{S}_C é dada por $N = N_1 + N_2 + N_3$. Essas matrizes são geradas numericamente utilizando-se matrizes aleatórias unitárias e seu algoritmo pode ser encontrado na ref. [3].

Para o modelo GF, primeiro geraram-se as matrizes sem simetria de reversão temporal (matrizes ECU). Depois, geraram-se as matrizes com simetria de reversão temporal (ECO) através da parametrização (3.7). A matriz de espalhamento efetiva $\mathbf{S}_C \bullet \mathbf{S}_\Gamma$ pode ser obtida através da eq. (2.30). Após obter a matriz \mathbf{S} , os blocos t_{ij} são extraídos. Com eles pode-se calcular as transmitâncias ($T_{ij} = \text{tr}(t_{ij} t_{ij}^\dagger)$). Dessa forma, é possível encontrar a condutância através da eq. (4.1). Ao final deste cálculo, finaliza-se uma realização numérica da simulação. Fazendo-se inúmeras destas realizações e gerando a matriz \mathbf{S}_C aleatoriamente, obtém-se uma amostra de condutância suficientemente grande para se extrair propriedades estatísticas. Fazemos um histograma desta amostra de condutância e normalizamos sua área à unidade, obtendo assim a densidade de probabilidade da condutância.

No modelo de ST, geramos a matriz da cavidade e, em seguida fazemos um número finito de realizações aleatórias para a matriz do estube. Para cada realização do estube,

obtemos a matriz de espalhamento efetiva e extraímos a condutância, através da eq. (2.18). Calculamos a média da condutância das realizações do estube e armazenamos este valor como a condutância do ponto quântico decoerente. Em seguida, fazemos uma nova realização para a matriz da cavidade e repetimos as realizações de estube, obtendo uma nova promediação de estube da condutância, sendo novamente armazenado esse valor. Com um número finito de realizações aleatórias para a matriz da cavidade, obtemos uma amostra suficientemente grande para extrairmos a densidade de probabilidade da condutância com efeitos de decoerência. Logo, para cada realização da cavidade, o meio causador de decoerência (aqui representado pelo estube) interage aleatoriamente com o sistema, promediando a condutância, ou seja, gerando uma condutância promediada pela decoerência. Por isso, a matriz do estube deve ter o menor viés.

Capítulo 5

Resultados

Este capítulo apresenta os resultados obtidos através de simulação computacional para os sistemas ilustrados nas figuras 4.1 e 4.2. Os valores das condutâncias passaram por um processo estatístico para que se conseguisse uma distribuição de condutância. Por simplificação, todas as condutâncias serão representadas em unidades do quantum de condutância $G_0 = \frac{2e^2}{h}$. A motivação para este estudo está no fato de que a tecnologia tornou possível a fabricação de um grande número de componentes pertencentes à escala mesoscópica.

Foram realizadas diversas simulações tanto para o modelo GF (fig. 4.1) como para o modelo ST (fig. 4.2), onde analisamos o comportamento de $\rho(G)$ em função de G .

5.1 Comportamento de ρ em função de G para o modelo GF

O processo de gerar a matriz aleatória e calcular a condutância foi repetido 1 milhão de vezes para cada par de entrada. Primeiro apresentaremos os resultados que serão comparados com os resultados analíticos obtidos na ref. [12]. Neste caso, o par de entrada é definido como (N_3, Γ) .

Na figura 5.1 temos o gráfico de $\rho(G)$ em função de G para diferentes valores da transparência Γ quando $N_3 = 1$ e quando há simetria de reversão temporal ($\beta = 1$). Verifica-se que as curvas estão em acordo com as apresentadas na ref. [12]. Note que para $\Gamma = 1$ (guia ideal) a curva representa uma reta com eq. $\rho(G) = 2 - 2G$, cuja média é dada por $\langle G \rangle = \int G \rho(G) dG = \int_0^1 (2G - 2G^2) dG = [G^2 - \frac{1}{3}G^3]_0^1 = \frac{1}{3}$. Ao calcularem $\langle G \rangle$ para este e outros valores de Γ , *Brouwer* e *Beenakker* encontraram o mesmo valor, mostrando que $\langle G \rangle$ é independente de Γ . Analisando a expressão da média da condutância para um ponto quântico

ideal sem efeito de decoerência, que pode ser encontrada na ref. [3]:

$$\langle G \rangle = \frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2 - 1 + \frac{2}{\beta}}, \quad (5.1)$$

em que β é o índice de simetria do centro espalhador, e fazendo-se $N_1 = N_2 = \beta = 1$, os valores da média da condutância coincidem. No entanto, a medida que a taxa de coerência Γ aumenta, a variância decresce.

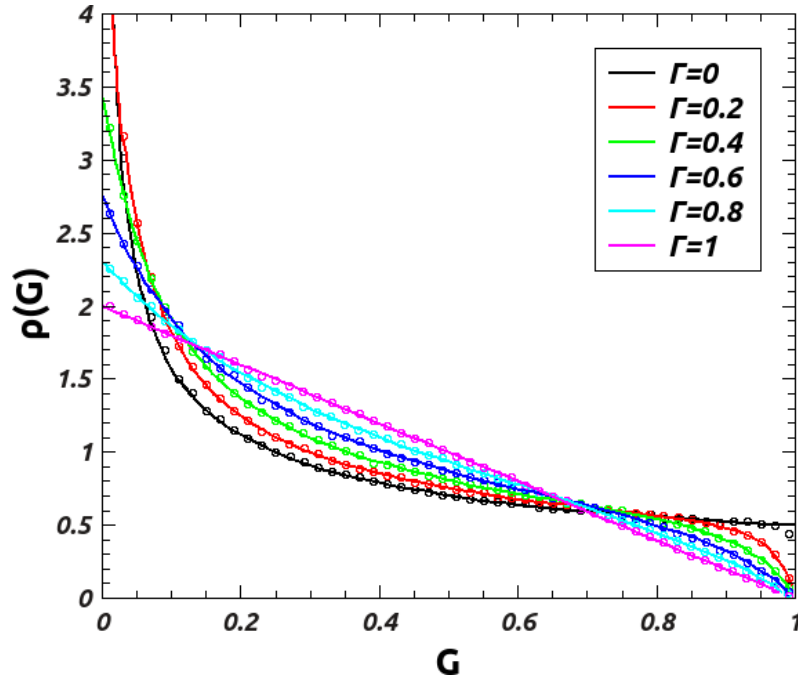


Figura 5.1: $\rho(G)$ versus G quando $N_3 = 1$ para diferentes valores de Γ com simetria de reversão temporal ($\beta = 1$). As linhas representam os valores encontrados na literatura, enquanto os pontos representam os dados obtidos por simulação neste trabalho.

A figura 5.2 apresenta o comportamento de $\rho(G)$ versus G variando-se o número de canais abertos entre 1 e 10 para $\Gamma = 1$, também para o caso em que há simetria de reversão temporal. Ao contrário do caso em que fixa-se N_3 variando-se Γ , neste caso a média da condutância depende de N_3 . A medida que N_3 aumenta, nota-se um acentuado estreitamento dos picos. De acordo com a ref. [12], no limite em que $N_3 \rightarrow \infty$ as curvas aproximam-se de uma gaussiana e a média da condutividade pode ser expressa como $\langle G \rangle = \frac{1}{2}(1 - N^{-1}) + O(N^{-2}) \approx \frac{1}{2}$.

A figura 5.3 mostra o gráfico da densidade de probabilidade quando há quebra de simetria de reversão temporal ($\beta = 2$). Neste caso, varia-se os valores de Γ matendo-se $N_3 = 1$. Para $\Gamma = 0$ (o equivalente ao ponto quântico sem guia fictício) nota-se uma

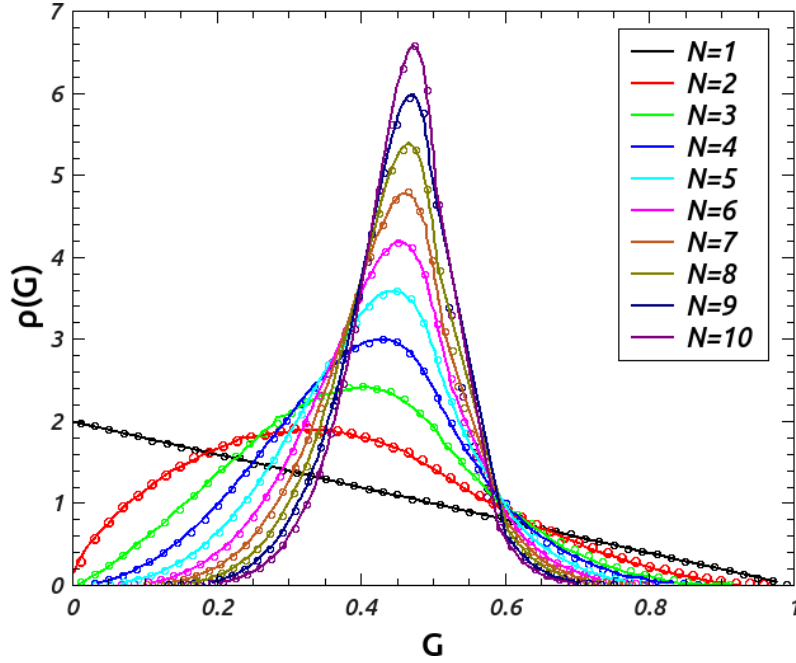


Figura 5.2: $\rho(G)$ versus G quando $\Gamma = 1$ para diferentes valores de N_3 com simetria de reversão temporal ($\beta = 1$). As linhas representam os valores encontrados na literatura, enquanto os pontos representam os dados obtidos por simulação neste trabalho.

distribuição uniforme. Uma característica resultante da quebra de simetria de reversão temporal é a simetria da distribuição de condutância em torno de $G = \frac{1}{2}$, implicando em $\langle G \rangle = \frac{1}{2}$.

Na figura 5.4, tem-se o gráfico da densidade de probabilidade onde variou-se os valores de N_3 mantendo-se $\Gamma = 1$, no caso em que há quebra de simetria de reversão temporal. A média da condutividade também é igual ao resultado anterior $\langle G \rangle = \frac{1}{2}$. Este resultado coincide com o resultado clássico, utilizando-se associação em série de dois condutores cujas condutâncias são equivalentes a de um ponto de contato quântico balístico (eq. (2.16)), isto é, $G_i = N_i$ $i = 1, 2$. Então, $G = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} = \frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2} = \frac{1}{2}$, em acordo com a eq. (5.1) quando $\beta = 2$.

A diferença entre as condutâncias médias nos casos em que $\beta = 1$ e $\beta = 2$ se deve à presença do efeito de localização fraca. Este efeito diminui a condutância do sistema na presença de reversão temporal [12].

A seguir mostraremos os resultados obtidos para o modelo GF na presença e ausência de simetria de reversão temporal para $N_1 = N_2 = 1$ e $N_1 = N_2 = 5$. Neste caso, variamos o número de canais do guia fictício e o valor da taxa de decoerência λ , de modo que, o par de entrada será definido como (N_3, λ) . A ref. [28] também utiliza o modelo de guia fictício e calcula a distribuição da condutância para alguns valores da taxa de decoerência mostrados aqui.

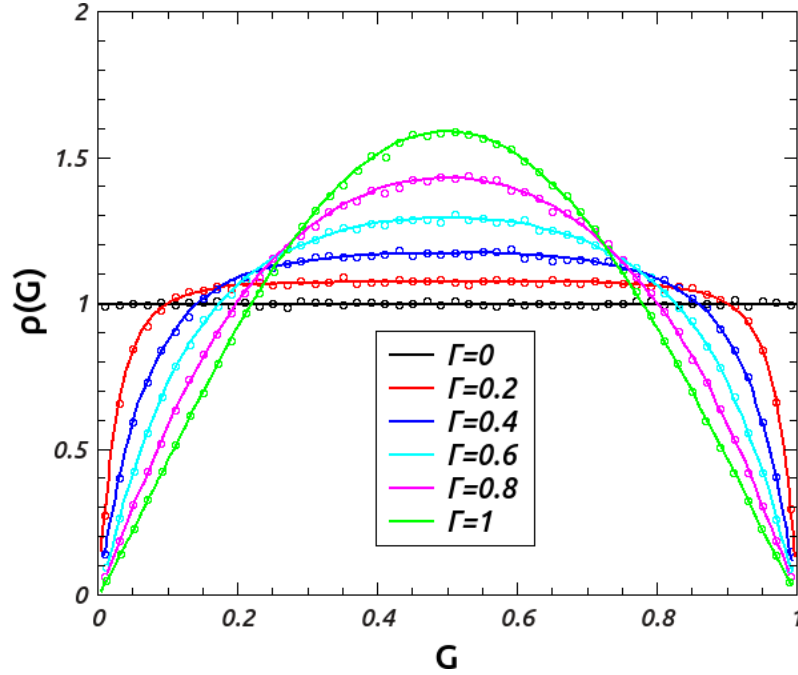


Figura 5.3: $\rho(G)$ versus G quando $N_3 = 1$ para diferentes valores de Γ quando não há mais simetria de reversão temporal ($\beta = 2$). As linhas representam os valores encontrados na literatura, enquanto os pontos representam os dados obtidos por simulação neste trabalho.

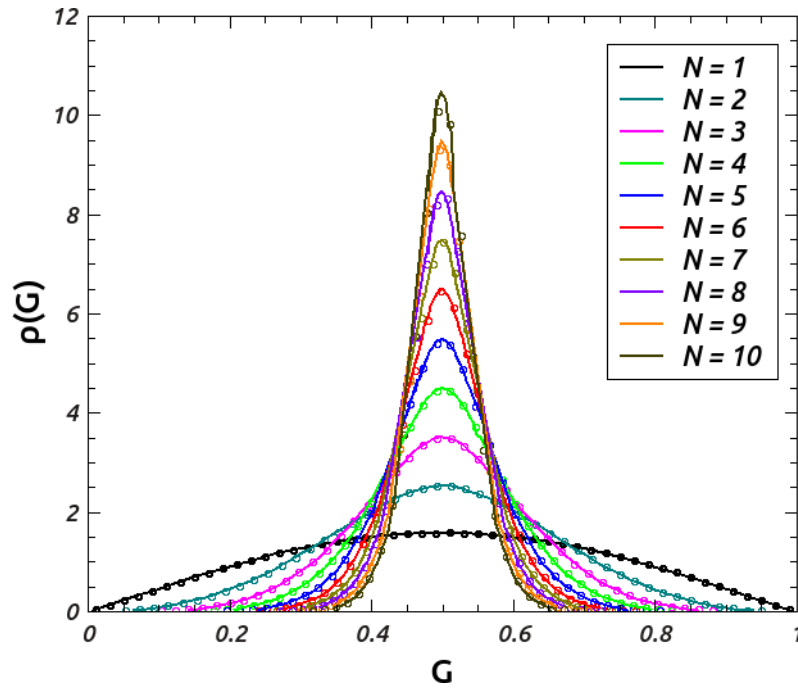


Figura 5.4: $\rho(G)$ versus G quando $\Gamma = 1$ para diferentes valores de N_3 quando não há mais simetria de reversão temporal ($\beta = 2$). As linhas representam os valores encontrados na literatura, enquanto os pontos representam os dados obtidos por simulação neste trabalho.

Na figura 5.5 temos os gráficos de $\rho(G)$ em função de G para vários valores da taxa de decoerência quando $N_1 = N_2 = 1$ para diferentes valores de N_3 no caso em que há simetria

de reversão temporal. Variamos λ em números inteiros de 1 a 5 para diferentes valores de N_3 . Foi utilizado o método da regressão linear¹ para obtermos a curva extrapolada, caso em que $N_3 \rightarrow \infty$, $\Gamma \rightarrow 0$. Tomando este limite observamos que as distribuições se tornam mais estreitas e as curvas tendem a uma gaussiana a medida que λ aumenta, e a média da condutividade fica em torno de $\langle G \rangle = \frac{1}{2}$.

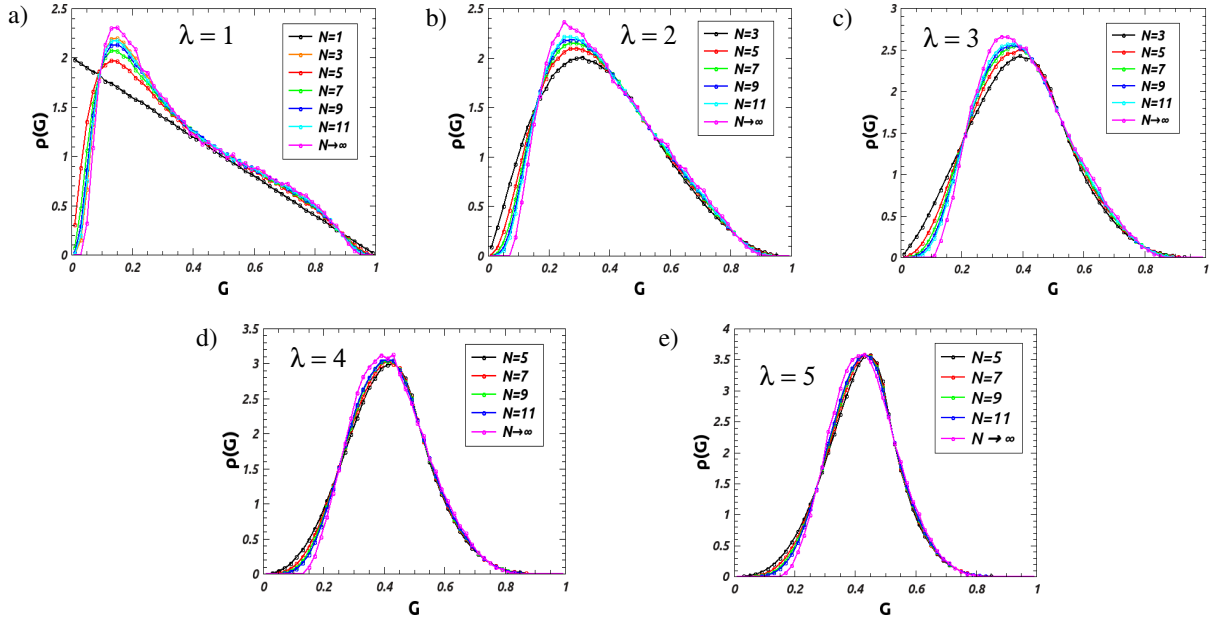


Figura 5.5: $\rho(G)$ versus G para diversos valores de λ quando $N_1 = N_2 = 1$ para diferentes valores de N_3 com simetria de reversão temporal ($\beta = 1$).

A figura 5.6 mostra o gráfico da densidade de probabilidade na presença simetria de reversão temporal quando $N_3 \rightarrow \infty$, para os valores da taxa de defasagem $\lambda = 1$, $\lambda = 2$ e $\lambda = 5$, obtidos anteriormente. As curvas sólidas representam os dados obtidos analiticamente na ref. [28] e os pontos são os resultados obtidos por simulação neste trabalho. Note que os resultados estão em acordo.

A figura 5.7 mostra os gráficos da densidade de probabilidade no caso em que fixamos $N_1 = N_2 = 5$ na presença de simetria de reversão temporal, variando-se N_3 e λ . Note que todas as curvas convergem e a média da condutância $\langle G \rangle = 2,25$. Neste caso, o número de canais dos guias reais (guia 1 (N_1) e guia 2 (N_2)) é considerado expressivo, por isso as distribuições

¹O método computacional fornece $\langle G \rangle$, no entanto, não é viável fazer o valor de N_3 muito grande, pois o tempo de processamento cresce como lei de potência [3] em função do número de canais abertos. Dessa forma, com o objetivo de solucionar o problema de N_3 muito grande, obtemos resultados para um número de canais razoavelmente grande e depois extrapolamos para $N_3 \rightarrow \infty$. Posteriormente, fazemos uma regressão linear.

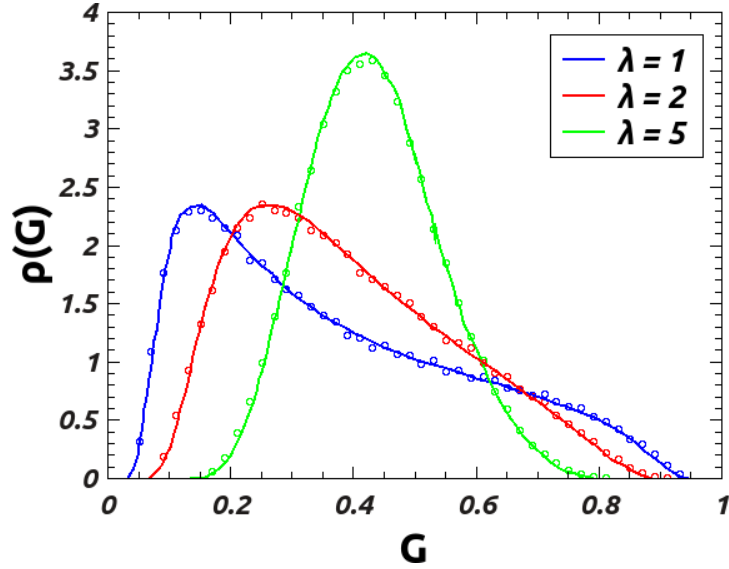


Figura 5.6: $\rho(G)$ versus G para diferentes valores de λ quando $N_1 = N_2 = 1$ e $N_3 \rightarrow \infty$ com simetria de reversão temporal ($\beta = 1$). As linhas representam os valores encontrados na literatura, enquanto os pontos representam os dados obtidos por simulação neste trabalho.

tendem mais rapidamente à gaussianas.

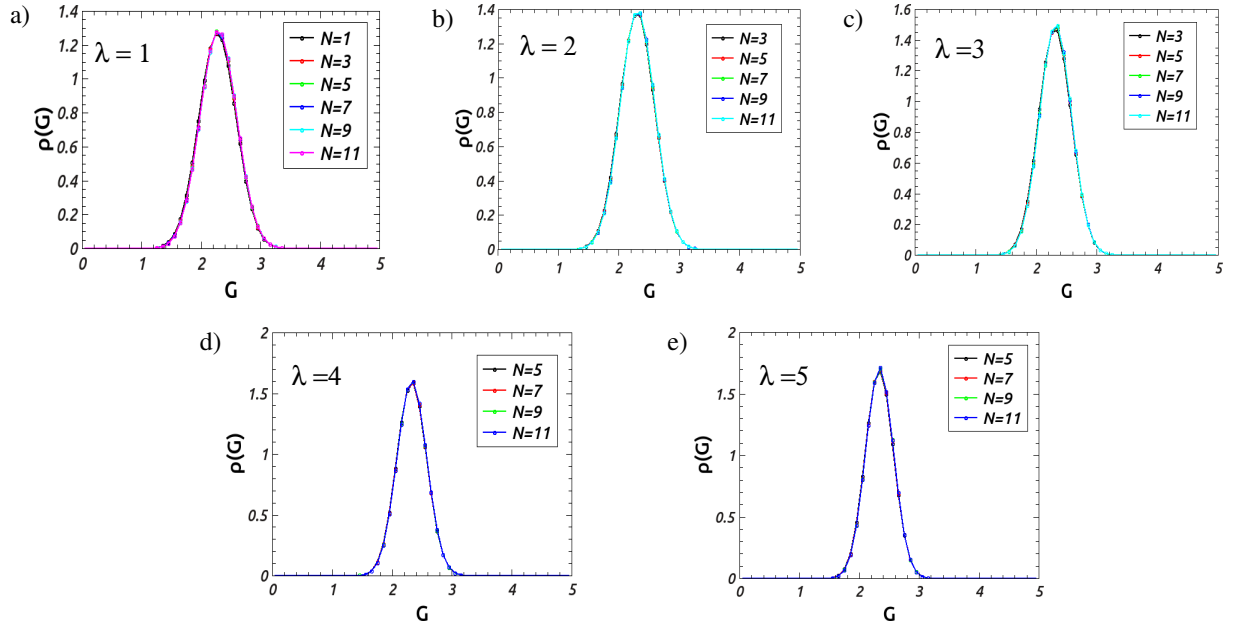


Figura 5.7: $\rho(G)$ versus G para diversos valores de λ quando $N_1 = N_2 = 5$ para diferentes valores de N_3 com simetria de reversão temporal ($\beta = 1$).

A figura 5.8 apresenta o comportamento de $\rho(G)$ versus G no caso em que não há mais simetria de reversão temporal ($\beta = 2$). Variou-se N_3 para diferentes valores de λ e, utilizamos também regressão linear para obtermos a curva extrapolada, quando $N_3 \rightarrow \infty$. Observa-se que a média da condutância é igual a $\langle G \rangle = \frac{1}{2}$, coincidindo com o resultado clássico. Percebe-se

também que a largura das distribuições vai estreitando a medida que λ aumenta, isso significa que o desvio padrão vai diminuindo.

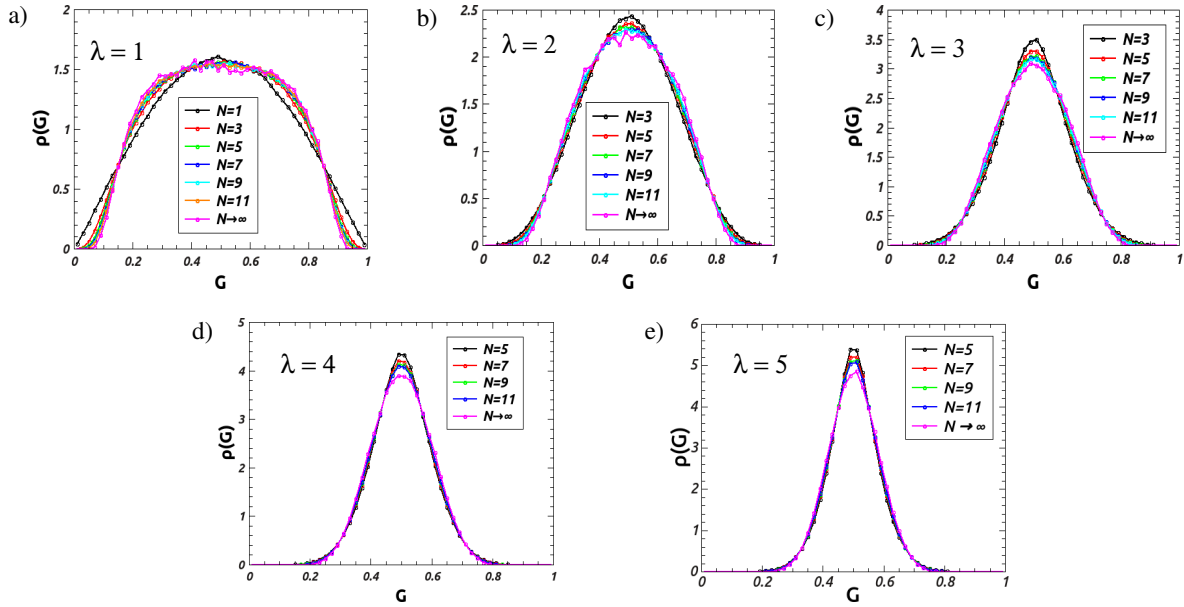


Figura 5.8: $\rho(G)$ versus G para diversos valores de λ quando $N_1 = N_2 = 1$ para diferentes valores de N_3 sem simetria de reversão temporal ($\beta = 2$).

Na figura 5.9 temos o gráfico de $\rho(G)$ versus G sem simetria de reversão temporal quando $N_3 \rightarrow \infty$, para os valores da taxa de defasagem $\lambda = 1$, $\lambda = 2$ e $\lambda = 5$, também obtidos anteriormente. As curvas sólidas representam os dados obtidos analiticamente na ref. [28] e os pontos são os resultados obtidos por simulação neste trabalho.

A figura 5.10 mostra os gráficos da densidade de probabilidade também no caso em que há quebra de simetria de reversão temporal ($\beta = 2$) para $N_1 = N_2 = 5$ variando-se λ e N_3 . Todas as curvas convergiram. Observe que $\langle G \rangle = 2,5$. Como mencionado anteriormente, a diferença entre as condutâncias médias para $\beta = 1$ e $\beta = 2$ é devido ao efeito de localização fraca.

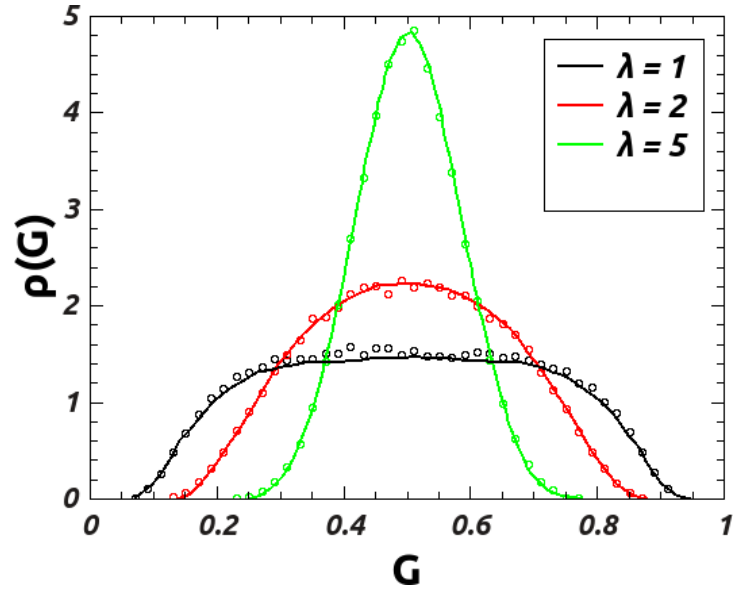


Figura 5.9: $\rho(G)$ versus G para diferentes valores de λ quando $N_1 = N_2 = 1$ e $N_3 \rightarrow \infty$ sem simetria de reversão temporal ($\beta = 2$). As linhas representam os valores encontrados na literatura, enquanto os pontos representam os dados obtidos por simulação neste trabalho.

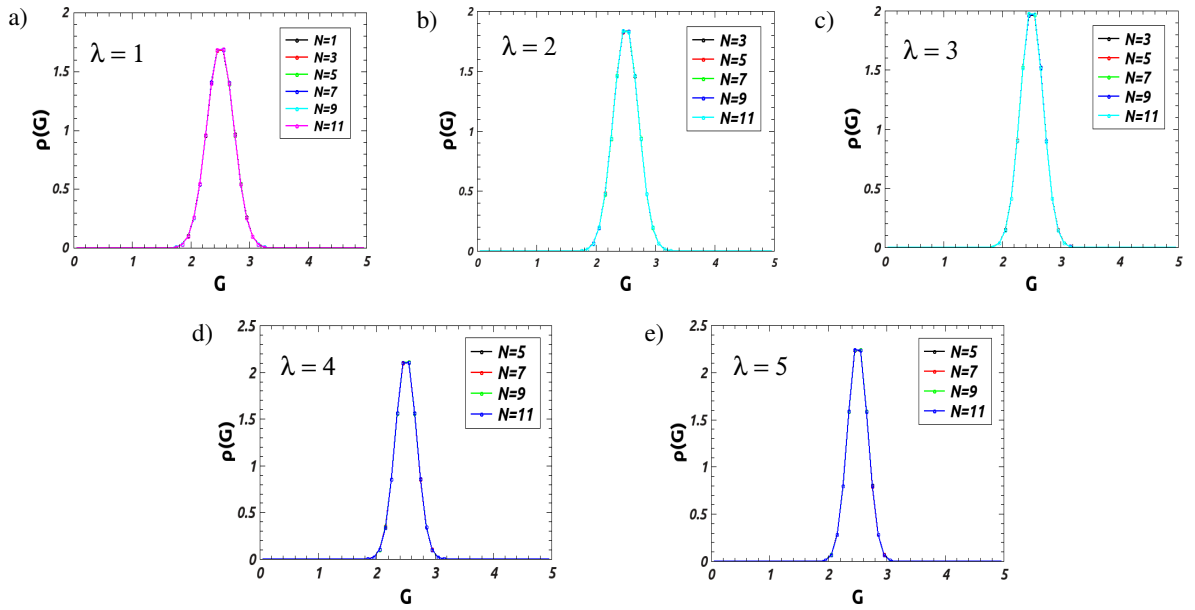


Figura 5.10: $\rho(G)$ versus G para diversos valores de λ quando $N_1 = N_2 = 5$ para diferentes valores de N_3 sem simetria de reversão temporal ($\beta = 2$).

5.2 Comportamento de ρ em função de G para o modelo ST

Nesta seção serão apresentados os resultados obtidos através do modelo de estude. O processo de gerar a matriz aleatória e calcular a condutância também foi repetido 1 milhão de vezes para cada par de entrada definido como (N_3, ξ) , onde ξ representa a taxa de decoerência. Foram geradas matrizes aleatórias tanto para o ponto quântico como para o estube. O método de regressão linear também foi utilizado para obtermos a curva extrapolada. O principal objetivo é encontrar a relação existente entre o modelo ST e o modelo GF. Para isso, calculamos a entropia relativa (ou distância de Kullback-Leibler)² S_{KL} [29, 30] entre as distribuições desses dois modelos decoerentes afim de encontrar a curva no modelo ST que mais se aproxima da curva no modelo GF. Temos que S_{KL} pode ser expressa da seguinte forma:

$$S_{KL}(\rho_\xi, \rho_\lambda) = \int \rho_\xi(G) \ln \left[\frac{\rho_\xi(G)}{\rho_\lambda(G)} \right], \quad (5.2)$$

onde $\rho_\xi(G)$ é a densidade de probabilidade no modelo ST e $\rho_\lambda(G)$ a densidade de probabilidade no modelo GF.

Todos os resultados presentes nesta seção são para os casos em que há simetria de reversão temporal quando $N_1 = N_2 = 1$.

A figura 5.11 mostra o comportamento de ρ *versus* G quando $N_3 \rightarrow \infty$, tanto para o modelo GF como para o ST. Na figura 5.11.a calculou-se S_{KL} para diversos valores de ξ mantendo-se $\lambda = 1$. A figura apresenta as curvas das distribuições referentes aos valores de ξ que mais se aproximaram da distribuição para $\lambda = 1$, ou seja, que tiveram os menores valores de S_{KL} .

Para as figuras 5.11.b - 5.11.e também calculamos S_{KL} para vários valores de ξ . As curvas mostram as distribuições referentes aos valores de ξ que estão mais próximas da distribuição para $\lambda = 2$, $\lambda = 3$, $\lambda = 4$ e $\lambda = 5$, respectivamente.

Tendo obtido estes resultados, queremos estimar, de fato, qual o valor de ξ que minimiza S_{KL} . Para isso, fizemos um ajuste de uma função cúbica para cada um dos casos apresentados na figura 5.11, calculamos a derivada e com o mínimo desta função estimamos qual o valor de

²A entropia relativa (S_{KL}) é uma medida da distância entre duas distribuições de probabilidade. Trata-se de um conceito relevante para a física estatística [31, 32] e para a teoria da informação quântica [33].

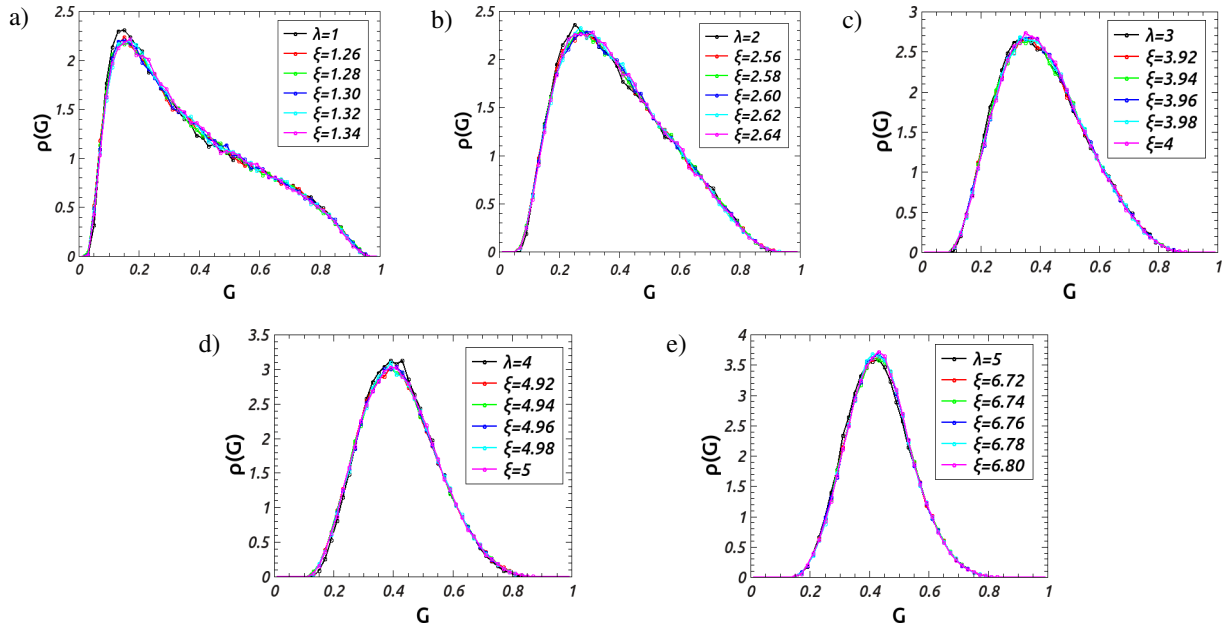


Figura 5.11: ρ versus G para os modelos ST e GF quando $N_3 \rightarrow \infty$.

ξ que mais se aproxima da distribuição do modelo GF. Denominamos este valor de ξ^* . A figura 5.12 mostra o gráfico de ξ versus S_{KL} que usamos para estimar ξ^* , para o caso representado na figura 5.11.a, onde a curva sólida representa o ajuste feito. De modo análogo, estimamos para os demais casos.

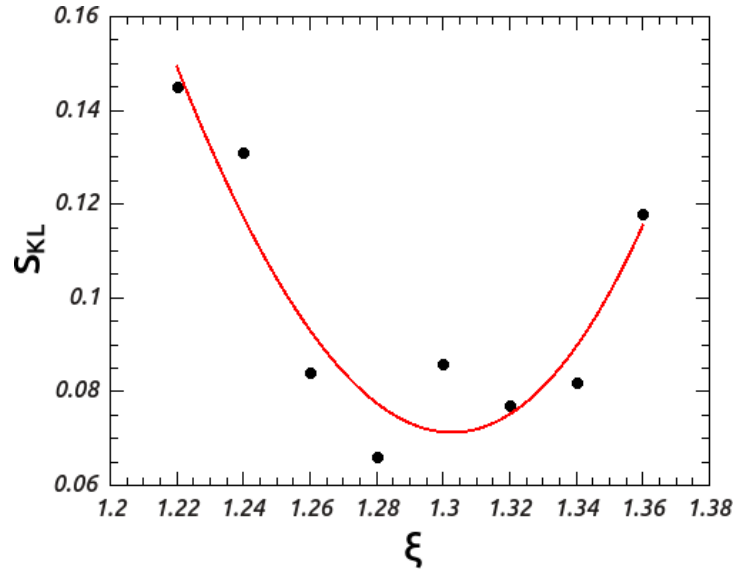


Figura 5.12: ξ versus S_{KL} . A curva sólida representa o ajuste cúbico (para $\lambda = 1$). Aqui, o valor que minimiza S_{KL} é $\xi^* = 1,303$.

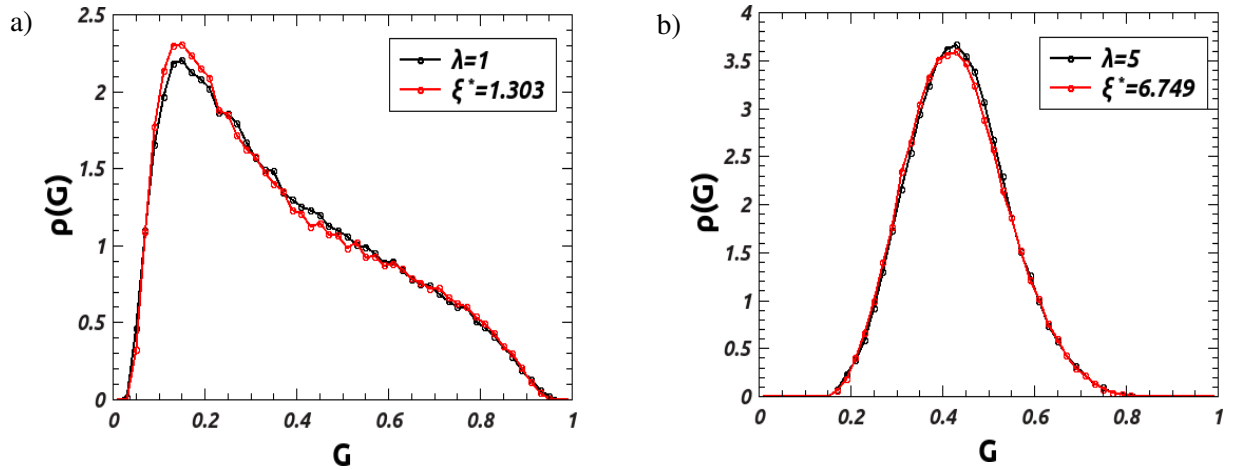
A tab. 5.1 mostra os valores de ξ^* que minimizam S_{KL} . Com esses valores geramos o gráfico da figura 5.14.

A figura 5.13 representa o comportamento da densidade de probabilidade para alguns

Tabela 5.1: Valores de ξ^* que minimizam S_{KL} entre os dois modelos de decoerência.

λ (modelo GF)	ξ^* (modelo ST)
1	1,303
2	2,571
3	3,937
4	5,016
5	6,749

dos casos mostrados na tab. 5.1. Na figura 5.13.a temos as curvas para $\lambda = 1$ e $\xi^* = 1,303$. Já para 5.13.b temos as curvas para $\lambda = 5$ e $\xi^* = 6,749$.

Figura 5.13: $\rho(G)$ versus ξ^* .

Observando a figura 5.14 podemos concluir que o comportamento de λ em função de ξ^* tende a ser linear. A eq. que representa este comportamento é:

$$\xi^* = a\lambda, \quad (5.3)$$

onde obtemos $a = 1,31$ através de uma regressão linear.

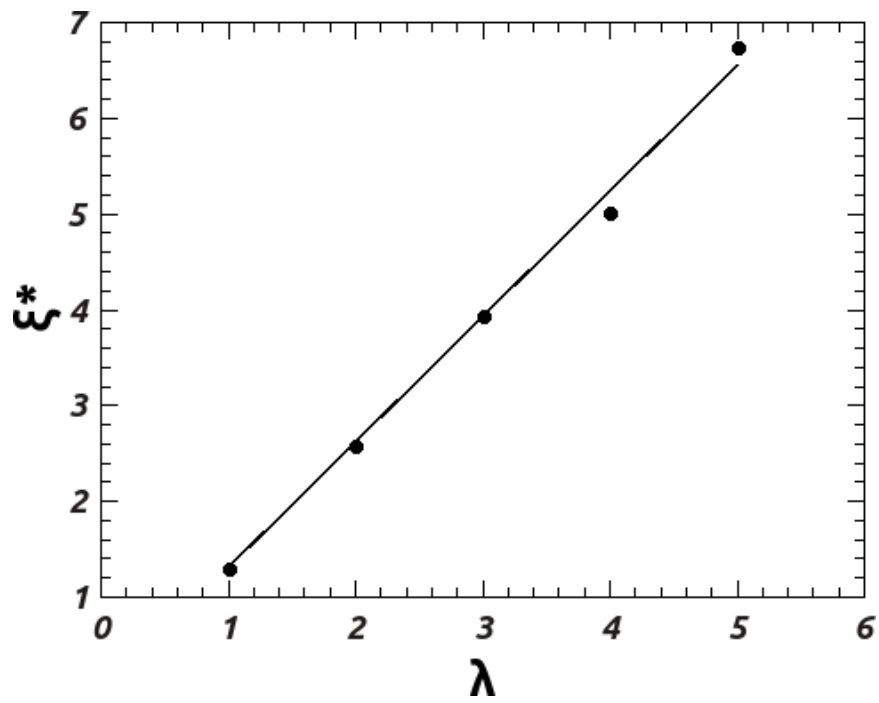


Figura 5.14: λ versus ξ^* . Para cada valor de λ temos um valor de ξ^* associado.

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

Nesta dissertação estudamos os conceitos fundamentais sobre o transporte eletrônico mesoscópico sob o efeito de decoerência, e obtivemos a condutância através da matriz de espalhamento para os seguintes sistemas: *i*) ponto quântico com guia fictício (modelo GF) e *ii*) ponto quântico com estube (modelo ST). Por tratar-se de sistemas onde os elétrons sofrem espalhamentos caóticos, fizemos uso da teoria de matrizes aleatórias (TMA), a qual fornece todas as informações sobre o transporte.

Alguns dos resultados obtidos para o primeiro sistema foram comparados com os resultados analíticos das refs. [12] e [28] apresentando estes uma excelente concordância, comprovando assim, a eficiência do método via simulação computacional.

Dos gráficos analisados e da comparação com os resultados obtidos na ref. [12] para $N_1 = N_2 = 1$ variando-se Γ e N_3 , conclui-se que:

1. Na ausência de simetria de reversão temporal, a distribuição da condutância é simétrica e $\langle G \rangle = 1/2$, coincidindo com o valor clássico, para dois condutores associados em série, cujas condutâncias são dadas pela fórmula do condutor balístico ideal, $G_i = G_0 N_i$.
2. Na presença de simetria de reversão temporal surge o efeito de localização fraca que contribui para a diminuição na média da condutância de $\langle G \rangle = 1/2$ ($\beta = 1$) para $\langle G \rangle = 1/3$.
3. Conforme a taxa de decoerência aumenta a condutância se aproxima do resultado clássico, aproximando (no caso em que $\beta = 1$) a média da condutância de $\frac{1}{2}$ e estreitando o desvio padrão. Notamos ainda que as curvas tomam a forma gaussiana e a medida que $N_3 \rightarrow \infty$, $\lambda \rightarrow \infty$, as distribuições se aproximam da delta de Dirac, dada por $\delta(G - \frac{1}{2})$.

Ainda para o modelo GF, calculamos a distribuição da condutância para o caso em que $N_3 \rightarrow \infty$ com $N_1 = N_2 = 1$ e $N_1 = N_2 = 5$ variando-se λ e N_3 . A ref. [28] calcula G para $N_1 = N_2 = 1$ para alguns dos valores da taxa de decoerência que nós também calculamos. Foi observado que os resultados também estão em acordo, tanto para $\beta = 1$ como para $\beta = 2$, e a medida que λ aumenta as curvas tendem à gaussiana. No caso em que $N_1 = N_2 = 5$, observa-se que todas as curvas convergem mais rápido e isso se deve ao fato de o número de canais abertos já ser considerado expressivo, diferente do regime quântico extremo, onde existem pouquíssimos canais abertos.

Para o modelo ST, calculamos a distribuição da condutância no caso em que há simetria de reversão temporal quando $N_1 = N_2 = 1$. O objetivo principal foi obter a relação existente entre os modelos ST e GF, para isso calculamos a distância de Kullback-Leibler S_{KL} entre as distribuições dos dois modelos. E, afim de obter o valor de ξ (no modelo de estube) que mais se aproxima do valor de λ (no modelo de guia fictício) fizemos o ajuste de uma função cúbica, calculando a derivada e com o mínimo desta função encontramos o valor de ξ que minimiza S_{KL} , o qual denominamos ξ^* . Encontramos que a relação entre estes dois modelos decoerentes tende a ser linear.

Como trabalhos futuros pode-se obter resultados para outros valores de β (1, 2 e 4), variando-se o número de canais nos dois guias, bem como suas transparências. Pretende-se aplicar o modelo ST para obter resultados com efeito de decoerência, que pelo modelo GF não são conhecidos, como por exemplo, outros cumulantes da estatística de contagem de cargas, como a potência do ruído de disparo [3]. Pretende-se, ainda, estudar o hamiltoniano associado ao modelo ST, afim de um melhor entendimento físico do problema, visando associar a taxa de decoerência com propriedades microscópicas do sistema como o tempo de decoerência e o espaçamento médio de níveis da cavidade.

Apêndice A

Condutância do ponto quântico caótico com guia fictício

No modelo do ponto quântico caótico com guia fictício, temos três guias que são designados por números. Através da eq. (2.17) com k assumindo os números de cada guia, obtemos o seguinte sistema com três equações:

$$G_0 I = T_{21}V_1 + T_{31}V_1 - T_{12}V_2 - T_{13}V_3 \quad (\text{A.1})$$

$$G_0 I = T_{21}V_1 + T_{23}V_3 - T_{12}V_2 - T_{32}V_2, \quad (\text{A.2})$$

$$0 = T_{13}V_3 + T_{23}V_3 - T_{31}V_1 - T_{32}V_2 \quad (\text{A.3})$$

em que $G_0 = \frac{h}{2e^2}$. De (A.3) obtemos a seguinte igualdade:

$$V_3 = \frac{T_{31}V_1 + T_{32}V_2}{T_{13} + T_{23}}$$

Substituindo a eq. acima em (A.1) resulta em

$$\begin{aligned} G_0 I &= (T_{21} + T_{31})V_1 - T_{12}V_2 - T_{13} \left(\frac{T_{31}V_1 + T_{32}V_2}{T_{13} + T_{23}} \right) = \\ &= \frac{(T_{21}T_{13} + T_{21}T_{23} + T_{31}T_{23})V_1 - (T_{12}T_{13} + T_{12}T_{23} + T_{13}T_{32})V_2}{T_{13} + T_{23}} \end{aligned}$$

Introduzindo a relação da eq. (2.28), obtemos uma expressão simplificada para G_0I :

$$\begin{aligned}
G_0I &= \frac{(T_{21}(T_{13} + T_{23}) + T_{31}T_{23})V_1 - (T_{12}(T_{13} + T_{23}) + T_{13}T_{32})V_2}{T_{31} + T_{32}} \\
&= \frac{(T_{21}(T_{31} + T_{32}) + T_{31}T_{23})V_1 - (T_{12}(T_{31} + T_{32}) + T_{13}T_{32})V_2}{T_{31} + T_{32}} \\
&= \frac{(T_{31}(T_{12} + T_{32}) + T_{21}T_{32})V_1 - (T_{12}(T_{31} + T_{32}) + T_{13}T_{32})V_2}{T_{31} + T_{32}} \\
&= \frac{(T_{32}(T_{31} + T_{21}) + T_{31}T_{12})V_1 - (T_{12}(T_{31} + T_{32}) + T_{13}T_{32})V_2}{T_{31} + T_{32}} \\
&= \frac{(T_{32}(T_{13} + T_{12}) + T_{31}T_{12})V_1 - (T_{12}(T_{31} + T_{32}) + T_{13}T_{32})V_2}{T_{31} + T_{32}} \\
&= \frac{(T_{12}(T_{31} + T_{32}) + T_{13}T_{32})V_1 - (T_{12}(T_{31} + T_{32}) + T_{13}T_{32})V_2}{T_{31} + T_{32}} \\
&= \frac{(T_{12}(T_{31} + T_{32}) + T_{13}T_{32})(V_1 - V_2)}{T_{31} + T_{32}} \\
&= \left(T_{12} + \frac{T_{13}T_{32}}{T_{31} + T_{32}} \right) (V_1 - V_2)
\end{aligned}$$

Assim, a condutância $G = \frac{I}{V_1 - V_2}$ pode ser escrita como

$$G = \frac{2e^2}{h} \left(T_{12} + \frac{T_{13}T_{32}}{T_{31} + T_{32}} \right).$$

Apêndice B

Unitariedade da matriz de espalhamento

A matriz de espalhamento satisfaz a seguinte relação [19]

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{S} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.1})$$

onde

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{r} & \mathbf{t}' \\ \mathbf{t} & \mathbf{r}' \end{pmatrix}$$

é a matriz de espalhamento. Os vetores \mathbf{a}_i e \mathbf{b}_i possuem as amplitudes das ondas que chegam e saem, respectivamente, do centro espalhador.

Pela conservação do fluxo de probabilidade, é necessário que

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1^\dagger & \mathbf{b}_2^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^\dagger & \mathbf{a}_2^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.2})$$

Aplicando-se a hermitiana na eq. (B.1) resulta em

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1^\dagger & \mathbf{b}_2^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} \mathbf{S}^\dagger, \quad (\text{B.3})$$

onde utilizou-se a propriedade $(\mathbf{AB})^\dagger = \mathbf{B}^\dagger \mathbf{A}^\dagger$. Das equações (B.1) e (B.3), obém-se:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1^\dagger & \mathbf{b}_2^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^\dagger & \mathbf{a}_2^\dagger \end{pmatrix} \mathbf{S}^\dagger \mathbf{S} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix},$$

que, comparando com a eq. (B.2), só é possível quando $\mathbf{S}^\dagger \mathbf{S} = \mathbb{I}$.

Referências Bibliográficas

- [1] S. Datta, *Electronic Transport in Mesoscopic Systems*. Cambridge: Cambridge University Press (1995).
- [2] Y. V. Nazarov e Y. M. Blanter. *Quantum Transport: Introduction to Nanoscience*. Cambridge: Cambridge University Press, 2009; Y. V. Nazarov. Quantum Transport and Circuit Theory. Em: M. Rieth e W. Schommers. *Handbook of Theoretical and Computational Nanotechnology (10-Volume set)*. Los Angeles: American Scientific Publishers, 2006. v. 1, cap. 95, p. 1-83.
- [3] Francisco Assis Gois de Almeida. Algoritmos numéricos de matrizes aleatórias aplicadas a sistemas mesoscópicos. Tese (Doutorado em física). Universidade Federal de Pernambuco. Departamento de física (2010).
- [4] E. R. Mucciolo, V. N. Prigodin e B. L. Altshuler. Statistical properties of level widths and conductance peaks in a quantum dot. *Phys. Rev. B* **51**, 1714 (1995).
- [5] S. M. Cronenwett, S. R. Patel, C. M. Marcus, K. Campman, and A. C. Gossard, “Mesoscopic fluctuations of elastic cotunneling in coulomb blockaded quantum dots,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 79, p. 2312 (1997).
- [6] Y. Imry, R. Landauer. Conductance viewed as transmission. *Rev. Mod. Phys.* **71**, S306, (1999).
- [7] A. G. Huibers, S. R. Patel, C. M. Marcus, P. W. Brouwer, C. I. Duruöz e J. S. Harris, Jr. Distributions of the Conductance and its Parametric Derivatives in Quantum Dots. *Phys. Rev. Lett.*, **81**, n° 9, pp. 1917-1920 (1998).
- [8] Yuri M. Galperin. *Quantum Transport: Lecture Notes*. Lund, 1998. Disponível em: <<http://folk.uio.no/yurig/>>. Acesso em: 25 de novembro de 2014.

- [9] N.W. Ashcroft e N. D. Mermin. *Solid State Physics*. Filadélfia: Saunders College.
- [10] C. M. Soukoulis e E. N. Economou. *Waves Random Media*, **9**, 255-269 (1999).
- [11] B. J. van. Wees, H. van Houten, C. W.J. Beenakker, J. G. Williamson, L.P. Kouwenhoven, D. van der Marel, and C. T Foxon, “Quantized conductance of point contacts in a two-dimensional electron gas”, *Phys. Rev. Lett*, vol. 60, p.848 (1988).
- [12] P. W. Brouwer e C. W. J. Beenakker. Effect of a voltage probe on phase-coherent conductance of a ballistic chaotic cavity. *Phys. Rev. B* **50**, 11263 (1994).
- [13] F. Haake, *Quantum Signatures of Chaos*. Springer 2nd ed. (1991).
- [14] David Poulin. A Rough Guide to Quantum Chaos. Physics Department and IQC, University of Waterloo.
- [15] D. Cohen, *Lectures notes of the Course in the 2002 Karpacz School*. Ben-Gurion University, Israel. Department of Physics (2002).
- [16] C. W. J. Beenakker and B. Michaelis. Stub model for dephasing in a quantum dot. *Journal of Physics* (2005).
- [17] R. Landauer. Spatial Variation of Currents and Fields Due to Localized Scatterers in Metallic Conduction. *IBM J. Res. Dev.* **1**:223, 1957; R. Landauer. Electrical resistance of disordered one-dimensional lattices. *Philos. Mag.* **21**:863 (1970).
- [18] Hackenbroich, G. et al. Quantum perturbation theory for the level splitting in billiards. *Phys. Rev. E*, v. 57, p. R5 (1998).
- [19] F. A. G. Almeida e A. M. S. Macêdo. Association of scattering matrices in quantum networks. *Journal of Computational Physics*, **243** 1-13 (2013).
- [20] M. L. Mehta. *Random Matrices*. Nova Iorque: Academic Press (1991).
- [21] Alhassid Y. The statistical theory of quantum dots. *Rev. Mod. Phys.* 2000; 72:895.
- [22] A. C. Bertuola, M. S. Hussein e M. P. Pato, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, **v. 28 No. 3**, p. 333-340 (2006).

- [23] T. Guhr, A. Müller-Groeling e H. A. Weidenmüller. Random Matrix Theories in Quantum Physics: Common Concepts. *Phys. Rep.* **299**:189,1998 [*arXiv.org*. condmat/9707301v1,1997].
- [24] C. Mahaux e H. A. Weidenmüller. *Shell-model Approach to Nuclear Reactions*. Amsterdã: North-Holland (1969).
- [25] P. A. Mello e N. Kumar. *Quantum Transport in Mesoscopic Systems: Complexity and Statistical Fluctuations*. Nova Iorque: Oxford University Press (2004).
- [26] K. Zyczkowski e M. Kus. Random unitary matrices. *J. Phys. A: Math. Gen.* **27**: 4235 (1994).
- [27] F. J. Dyson. Statistical theory of statistical levels of complex systems I. *J. Math. Phys.* **3**:140 (1962).
- [28] P.W. Brouwer e C. W. J. Beenakker. Voltege-probe and imaginary-potential models for defhasing in a chaotic quantum dot. *Phys. Rev.* (1996).
- [29] S. Kullback e R. A. Leibler. On information and sufficiency. *Ann. Math. Stat.* **22**:79 (1951).
- [30] J. Shlens. *Notes on Kullback-Leibler Divergence and Likelihood Theor*, (2014).
- [31] H. Qian. Relative Entropy: Free Energy Associated with Equilibrium Fluctuations and Nonequilibrium Deviations. *arXiv.org*. math-ph/0007010 (2000).
- [32] E. T. Jaynes. *Probability Theory: The Logic of Science*. Cambridge: Cambridge University Press (2003).
- [33] T. M. Cover e J. A. Thomas. *Elements of Information Theory*. Nova Iorque: Wiley (1991).